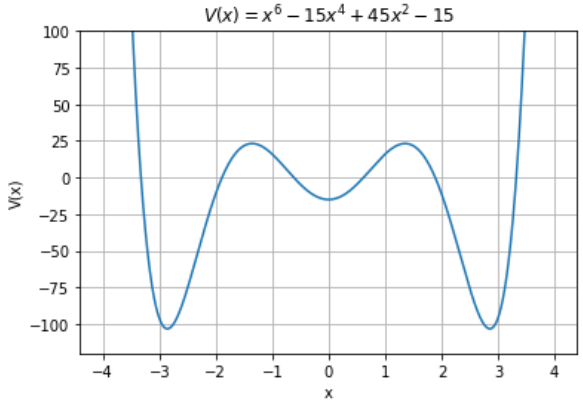
Seminaroppgaver 7

S 7.1 Et potensial

Figuren viser et endimensjonalt potensial gitt ved $V(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$.



a) Bruk grafen til å identifisere stabile og ustabile likevektspunkter.

Løsning: Potensialet har stabile likevektspunkter i $x = 0$ og cirka $x = \pm 3$, og ustabile likevektspunkter i cirka $x = \pm 1.5$.

b) Se for deg at du har en friksjonsfri bane formet som dette potensialet. Hva skjer hvis du slipper en kule ned på banen i nærheten av et stabilt likevektspunkt?

Løsning: Kula vil oscillere rundt bunnpunktet, ved å skli opp til samme høyde som den ble sluppet fra på begge sider av bunnpunktet.

c) Finn Taylorpolynomet av andre orden for potensialet rundt 0. Hvorfor forsvinner et av leddene i polynomet? *Hint: Hvordan ser forskjellige ordens deriverte ut rundt ekstremalpunkter?*

Løsning:

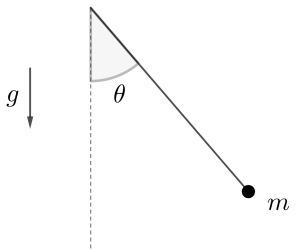
$$\frac{dV(x)}{dx} = 6x^5 - 60x^3 + 90x$$
$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 30x^4 - 180x^2 + 90$$
$$\frac{d^3V(x)}{dx^3} = 120x^3 - 360x$$

Taylorpolynomet blir da $V(x) \approx V(0) + \frac{dV(0)}{dx}(x-0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2V(0)}{dx^2}(x-0)^2 = -15 + 45x^2$. Førsteordensleddet forsvinner fordi den førstederiverte er lik null i et ekstremalpunkt.

d) Sammenlikn Taylorpolynomet med potensialet til en fjær, $V(x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, der Δx er forflytningen fra likevektspunktet. Bruk dette til å identifisere hvilket del av Taylorpolynomet som kan sammenliknes med en fjærkonstant for systemet.

Løsning: Potensialet til en fjær er gitt ved $V(x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, der Δx er forflytningen fra likevektspunktet. Vi kan se at andreordensleddet i rekka også har komponentene $\frac{1}{2}$ og x^2, som betyr at $\frac{d^2V(0)}{dx^2}$ kan sammenliknes med fjærkonstanten.

S 7.2 Pendel med luftmotstand



Figuren viser en pendel før den slippes. Vinkelen θ er mellom horisontalen og snora. Vi antar at snora er masseløs og stram. I ukas forelesning har vi sett at akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning (vinkelakselerasjonen) er gitt ved

$$a_T = -g\sin\theta \tag{1}$$

dersom vi ser bort fra luftmotstand. Man kan bruke buelengden $L = l\theta$ langs bevegelsen til å uttrykke akselerasjonen som

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{2}$$

I denne oppgaven skal vi ta med luftmotstand. Vi skal bruke en lineær luftmotstandskraft $\vec{F}_D$, som er gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på motstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

a) I hvilken retning vil luftmotstandskraften virke i en sirkelbane?

Løsning: I en sirkelbane vil hastighetsvektoren alltid være tangentiell til bevegelsen, så luftmotstanden vil virke i tangentiell retning.

b) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelhastighet. Bruk Newtons 2. lov og finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen som erstatter ligning (1) når vi tar hensyn til luftmotstand.

Løsning: Dersom vi deriverer buelengden $L = l\theta$ med hensyn på tid, får vi at størrelsen til hastigheten v i tangentiell retning er $v = l\frac{d\theta}{dt}$. Luftmotstandskraften blir derfor

$$\vec{F}_D = -Dl\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_T$$

Ved å bruke N2L får vi da

$$ma_T = -mg\sin(\theta) - Dl\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow a_T = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

c) Sett opp en differensiallikning for vinkelen θ.

Løsning: Fra deloppgave a) har vi at den tangentielle akselerasjonen kan skrives som $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Vi kan derfor sette

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

Differensiallikningen for vinkelen er derfor

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

d) Hvorfor er det hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensiallikningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensiallikningen fra c) slik at den kun inneholder ledd med θ og dens deriverte.

Løsning: Pendelen har et stabilt likevektspunkt i $\theta = 0$, som betyr at den vil oscillere rundt $\theta = 0$ hvis den slippes fra relativt liten vinkel.

$$\sin(\theta) \approx \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}(\theta - 0) + \ldots = \theta + \ldots$$

Differensiallikningen blir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

e) Sett opp et uttrykk for likningens analytiske løsning, og skriv et program som plotter bevegelsen over 20 s. Anta at pendelen slippes fra ro med en vinkel $\theta_0 = 15°$. Bruk $l = 1$ m, $D = 0.3$ kg/s og $m = 0.5$ kg. *Tips: Gjør algebraen enklere ved å bruke definisjoner som for eksempel* $\frac{D}{2m} \equiv \alpha$, $\frac{g}{l} \equiv \beta^2$ *og* $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. *Generelt anbefaler vi å kun sette inn verdier når man skal finne ut hva slags løsning man har, og når man plotter.*

Løsning: Likningen er en homogen annenordens difflikning på formen $\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$. For å løse den, begynner vi med å finne det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{g}{l}}$$

Bruker tipset, og får da

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

Ved å sette inn verdier for D, m, g og l får man at uttrykket under rottegnet er negativt. Kan da skrive

$$\lambda = -\alpha \pm \gamma i$$

som betyr at den generelle løsningen er

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\gamma) + B\sin(\gamma t)\right)$$

Deriverer løsningen med hensyn på tid, og får

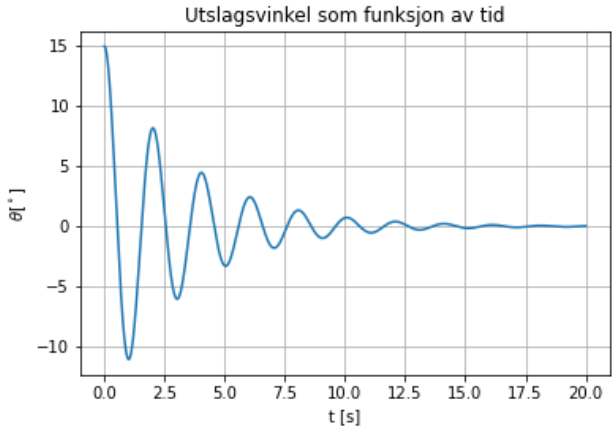
$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}\left(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)\right) + e^{-\alpha t}\left(-\gamma A\sin(\gamma t) + \gamma B\cos(\gamma t)\right)$$

Initialbetingelsene gir da

$$\theta(0) = \theta_0 = A \Rightarrow A = \theta_0$$
$$\frac{d\theta(0)}{dt} = 0 = -\alpha A + \gamma B \Rightarrow B = \frac{\alpha A}{\gamma} = \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}$$

som betyr at den partikulære løsningen er

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(\theta_0\cos(\gamma t) + \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)$$



Kode for plottet:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g = 9.81 #[m/s^2]
l = 1 #[m]
b = 0.3 #[kg/s]
m = 0.5 #[kg]

alpha = b / (2 * m)
beta = np.sqrt(g / l)
gamma = np.sqrt(beta ** 2 - alpha ** 2)

theta0 = 15 * np.pi / 180 #[rad]
thetadot0 = 0

A = theta0
B = alpha * A / gamma

t = np.linspace(0, 20, 10001) #[s]
theta = np.exp(- alpha * t) * (A * np.cos(gamma * t) + B * np.sin(gamma * t))
plt.plot(t, theta * 180 / np.pi)
plt.title('Utslagsvinkel som funksjon av tid')
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel(r'$\theta [^\circ]$')
plt.grid()
plt.savefig('theta_dempet.png')
plt.show()
```

S 7.3 Dempede svingninger

Et lodd med massen m er festet i ei fjær med fjærkonstant k. Loddet beveger seg i et medium som gir en motstand proposjonal med farta. Vi legger origo i likevektspunktet for loddet.

a) Forklar at posisjonen til loddet som funksjon av tida er beskrevet ved differensiallikninga

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

b) Vi antar at vi har målt m og k, men ikke kjenner c. Vi tenker oss at vi gjør følgende eksperiment for å bestemme c. Vi slipper loddet fra ro i posisjonen $x_0 > 0$ og observerer at loddet snur første gang i posisjonen x_1. Her er $x_1 < 0$ og $|x_1| < x_0$. Finn et uttrykk for c uttrykt ved de kjente størrelsene m, k, x_0 og x_1.

Løsning: Vi kaller $c/m = \gamma$ og $k/m = \omega^2$. Den karakteristiske likninga er $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$ med

røttene

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\bar{\omega}$$

der $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Den generelle løsninga er da

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(A\cos\bar{\omega}t + B\sin\bar{\omega}t).$$

Ved å bruke initialbetinglesene $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = 0$ finner vi $A = x_0$ og $B = x_0\gamma/(2\bar{\omega})$m, slik at løsninga blir

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t/2}(\cos\bar{\omega}t + \frac{\gamma}{2\bar{\omega}}\sin\bar{\omega}t).$$

Vi må finne tidspunktet t_1 når loddet snur første gang. Vi vet at om $\gamma = 0$ snur loddet når $\bar{\omega}t = \pi$, og vi sjekker at dette også er tilfellet om $\gamma > 0$. Det vil si at

$$x_1 = x(\pi/\bar{\omega}) = -x_0 e^{-\gamma\pi/2\bar{\omega}}$$

Dermed er

$$\gamma = \frac{2}{\pi}\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\ln\left|\frac{x_0}{x_1}\right|$$

som vi løser og finner

$$\gamma = \frac{2\omega}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2\left|\frac{x_0}{x_1}\right|}}}$$

eller

$$c = \frac{2m\omega}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2\left|\frac{x_0}{x_1}\right|}}}.$$

Ukas utfordring

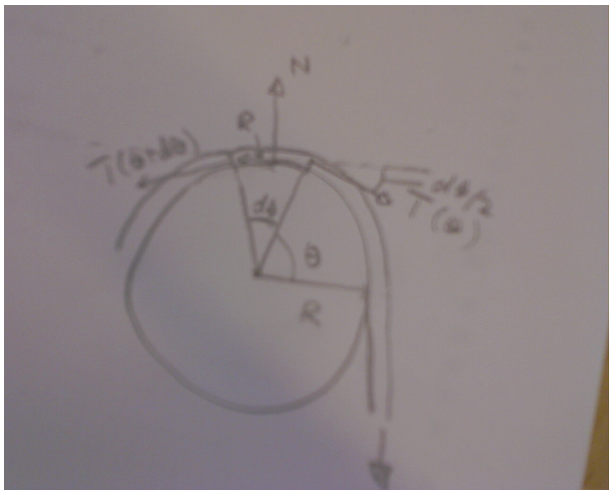
Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med.

S 7.4 Tau rundt sylinder

I denne oppgaven skal vi utlede en modell for krafta i et tau som går rundt en sylinder.
Utgangspunktet for denne oppgaven er et enkelt forsøk som alle kan gjøre:
`https://www.naturfag.no/forsok/vis.html?tid=16215`
Det vi skal fokusere på her er hvor fort friksjonen øker når et tau vikles rundt en sylinder.

a) Se på et tau viklet om en sylinder. Tegn et frilegemediagram som viser alle kreftene som virker på en liten (infinitesimal) bit av tauet. Anta at friksjonen er tilstrekkelig til at tauet ikke glir

Løsning:



b) Sett opp en differensiallikning som viser hvordan snordraget varierer langs tauet hvis krafta vi trekker i enden av tauet med er så stor at tauet akkurat ikke begynner å gli.

Hint: Bruk Taylorrekker til å sammenlikne kreftene i hver ende av den lille biten med tau.

Løsning: Siden tauet er i ro er summen av kreftene null. Se først på krefter radielt (normalt til sylinderflata)

$$N = T(\theta)\sin\frac{d\theta}{2} + T(\theta+d\theta)\sin\frac{d\theta}{2}$$

Vi gjør to rekkeutviklinger:

$$\sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{d\theta}{2}\right)^3 + \cdots \approx \frac{d\theta}{2}$$

$$T(\theta+d\theta) = T(\theta) + \frac{dT}{d\theta}d\theta + \cdots$$

Legg merke til at siden vi skal la $d\theta \to 0$ trenger vi bare å ta med ledd til første orden i $d\theta$ siden alle høyere ordens ledd går mot null fortere. Vi får da

$$N(\theta) = T(\theta)\frac{d\theta}{2} + \left(T(\theta) + \frac{dT}{d\theta}d\theta + \cdots\right)\frac{d\theta}{2} \approx T(\theta)d\theta$$

der vi igjen bare tar med ledd til første orden i $d\theta$. Vi ser så på kreftene tangentielt (parallelt med sylinderflata). Friksjonskrafta er $R(\theta) = \mu N(\theta)$ siden tauet akkurat holder på å begynne å gli på alle punkter. Dermed er

$$T(\theta)\cos\frac{d\theta}{2} = T(\theta+d\theta)\frac{d\theta}{2} + \mu N(\theta).$$

Igjen rekkeutvikler vi til første orden og bruker

$$\cos\frac{d\theta}{2} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 + \cdots \approx 1$$

Dermed er

$$T(\theta) = T(\theta) + \frac{dT}{d\theta}d\theta + \mu T(\theta)d\theta$$

Vi får da at

$$\frac{dT}{d\theta} = -\mu T(\theta).$$

c) Løs differensiallikninga du fant over for passende initialbetingelser.

Løsning: Hvis T_0 er krafta i den enden av tauet som vi drar i finner vi at

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

d) Sett opp et eksperiment som tester den loven du fant over for snordraget som funksjon av vinkel som tauet er viklet rundt sylinderen

Løsning: Vi måler krafta som skal til for at tauet begynner å gli som funksjon av vinkelentauet er viklet rundt sylinderen. Siden vi forventer at krafta øker eksponensielt med vinkelen plotter vi logaritmen til den avleste krafta som funksjon av vikelen. Vi foventer da at målepunktene skal ligge på ei rett linje.

