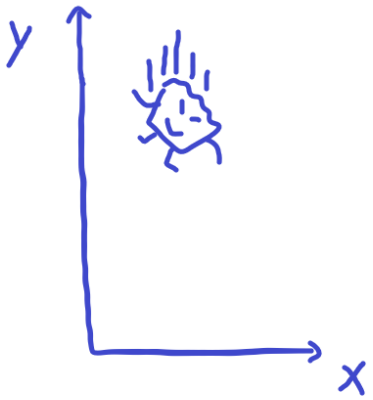
Seminaroppgaver 8

S 8.1 Fallende muffinsform



I følgende oppgave skal vi se på posisjonen til en muffinsform av papir som blir sluppet fra 2 meters høyde. Den blir påvirket av både tyngdekraft og luftmotstand.

a) Les inn posisjon- og tidsdatapunktene fra filen y_axis_muffinpaper.txt, og plott posisjonen som en funksjon av tid. Beskriv grafen.

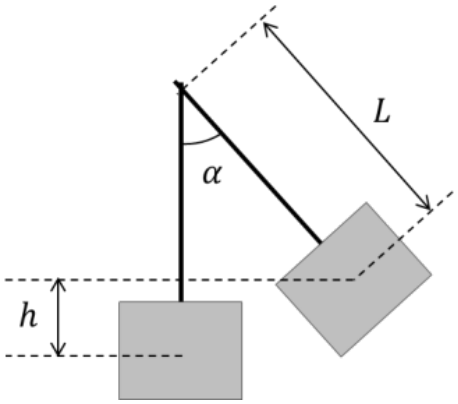
b) Finn numerisk farten som en funksjon av tid, og plott den. Hva ser vi at skjer med farten ettersom tiden går? Hvorfor får farten denne formen? Forklar. Prøv videre fra farten å anslå kvalitativt hvordan akselerasjonen vil se ut.

c) Finn numerisk akselerasjonen som en funksjon av tid og plott den. Stemmer den med den kvalitative beskrivelsen dere ga i forrige oppgave?

d) Ved hvilken tid blir luftmotstanden like stor som gravitasjonskraften? Bruk den numeriske akselerasjonsgrafen for å finne den omtrentlige tiden når dette skjer. Kan man se dette kun fra akselerasjonsgrafen eller kunne man ha funnet ut dette ved å se på de andre figurene?

S 8.2 En kule skytes i en trekubbe

En trekubbe på 5,0 kg henger i en 1,0 m lang snor som har neglisjerbar masse. Du skyter en pistolkule på 10 g horisontalt inn i kubben med hastighet $v = 400$ m/s. Kulen stanser og kubben svinger opp. Vi ser bort fra luftmotstand.



a) Hvor mye kinetisk energi har kulen før kollisjonen?

b) Hvor mye kinetisk energi har kubben etter kollisjonen?

c) Til hvilken vinkel svinger kubben opp?

S 8.3 En pendel med stort utslag

Bevegelsesligningen til vinkelen θ mellom snora til en pendel og vertikalen er gitt ved

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0, \tag{1}$$

der g er tyngdeakselerasjonen og l er pendelsnorens lengde. Dersom pendelen slippes fra en liten vinkel θ_0, kan man bruke Taylor-rekkeutvikling til å tilnærme $\sin(\theta)$ som θ, og dermed forenkle ligningen til

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{2}$$

Dersom pendelen slippes fra ro, blir løsningen på denne differensialligningen $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$.

a) Skriv et program som beregner vinkelen som funksjon av tid uten å bruke Taylor-rekkeutviklingen, for en gitt initialhastighet og startvinkel. Med andre ord, skriv et program som løser likning (1) numerisk. Bruk Euler-Cromer-metoden.

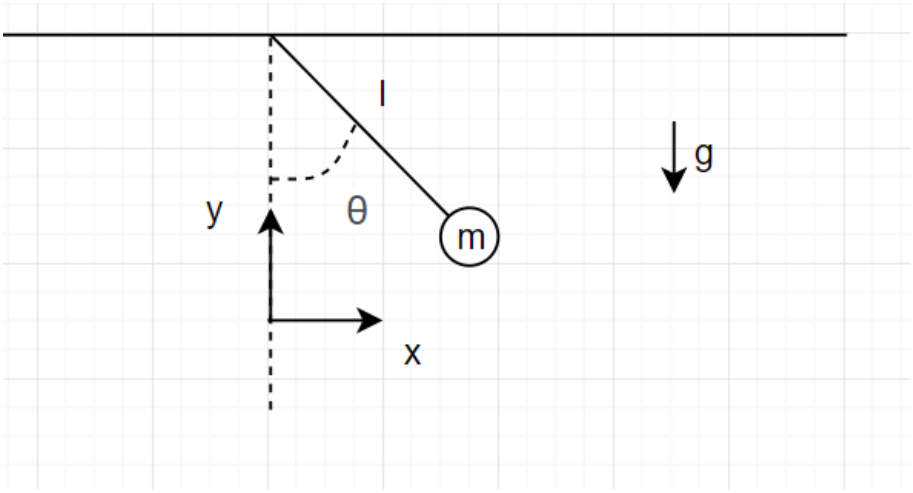
I de neste deloppgavene skal vi se på forskjellen på den numeriske løsningen og den analytiske løsningen vi får når vi bruker Taylor-rekkeutviklingen. Bruk $l = 2.0$ m, og anta at pendelen slippes fra ro. Vi lar koden beregne bevegelsen for en tid fra 0 s til 30 s.

b) Lag fire plott der dere sammenlikner den numeriske løsninga av likning (1) med den analytiske løsninga av likning (2). Bruk $\theta_0 \in \{15°, 30°, 45°, 90°\}$ og se på de første 30 s av bevegelsen. Diskuter hvor god den tilnærmede løsningen er for de forskjellige utslagsvinklene. Svarer resultatene til forventningene deres?

c) I forrige deloppgave er det (som alltid med numeriske løsninger!) viktig å finne en passende steglengde. Prøv forskjellige steglengder og kommenter hva som skjer hvis de er for store. Prøv her både Euler-Cromer-metoden som tidligere, og sammenlign dette med Euler-metoden.

S 8.4 Pendel med luftmotstand

I denne oppgaven skal vi undersøke en pendels bevegelse med luftmotstand numerisk, finne farten i bunnpunktet og sammenlikne denne med hva farten ville vært uten luftmotstand. Anta at pendelen er festet i taket med en masseløs, stram snor med lengde $l = 1.0$ m. Vi plasserer koordinatsystemet vårt slik at når pendelen henger helt stille i bunnpunktet, befinner den seg i origo, se figur. Pendelen har en masse på $m = 3.0$ kg, og før den slippes henger den med en vinkel på $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ i forhold til y-aksen.



a) Finn pendelens x- og y-posisjon som funksjon av vinkelen θ. Husk at $y(\theta = 0) = 0$ m.

b) Bruk bevaring av mekanisk energi for å finne hastigheten til pendelen når den er i bunnpunktet i banen, dersom vi slipper den fra ro og ser bort fra luftmotstand.

c) Tegn et frilegemediagram av pendelen litt etter at den slippes. Inkluder luftmotstand.

d) Skriv opp summen av kreftene som virker i tangentiell retning på pendelen. Finn også akselerasjonen i denne retningen ved Newtons 2. lov.

e) Vis at bevegelsesligningen til pendelen er

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{b}{ml}v$$

når luftmotstandskraften er gitt ved

$$\vec{F}_D = -b\vec{v}$$

Her er b en konstant, vi bruker $b = 0.50$ kg/s.

f) Bruk Euler-Cromer-metoden for å finne farten i banens bunnpunkt numerisk ved å bruke akselerasjonen som inkluderer luftmotstand. Kommenter svaret. *Hint: Vi kan bruke buelengde til å skrive at* $v_t = l \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

g) Er forskjellen i fart med og uten luftmotstand større eller mindre dersom man begynner i $\theta_0 = \pi/2$? Forklar resultatet du finner.

h) Finn numerisk arbeidet luftmotstanden har gjort under bevegelsen fra starten til bunnpunktet. Finn fra dette den mekaniske energien i bunnpunktet og dermed farta. Stemmer denne med det du fant ved den direkte numeriske beregningen?