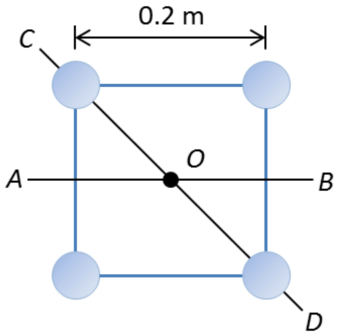
Seminaroppgaver 10

S 10.1 Treghetsmoment



Fire små kuler med masse $m = 0.20$ kg arrangeres i et kvadrat med sider 0.20 m som vist i figuren. Kulene kan betraktes som punktmasser og forbindelsen mellom kulene betraktes som vektløs. Finn treghetsmomentet til legemet for en akse

a) som går gjennom senteret O vinkelrett på planet.

Løsning: Fra Pytagoras så finner vi at avstanden mellom massene og rotasjonsaksen er $\rho_i = \sqrt{(0.10\text{m})^2 + (0.10\text{m})^2}$ for alle fire kulene. Siden vi betrakter kulene som punktmasser, får vi treghetsmomentet

$$I_O = \sum_i m_i \rho_i^2 = 4 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.020\text{m}^2 = 0.016\text{kg m}^2$$

b) AB som halverer kvadratet.

Løsning: For denne aksen har vi $\rho_i = 0.10$ m for alle kulene.

$$I_{AB} = 4 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.010\text{m}^2 = 0.0080\text{kg m}^2$$

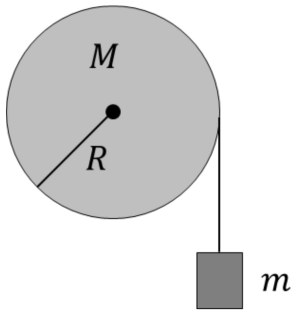
c) CD som går diagonalt gjennom to hjørner av kvadratet.

Løsning: Her har vi at to kuler har avstand $\rho_i = 0\text{m}$ fra aksen og bidrar dermed ikke, og to kuler har avstanden $\rho_i = \sqrt{(0.10\text{m})^2 + (0.10\text{m})^2}$. Dermed får vi:

$$I_{CD} = 2 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.020\text{m}^2 = 0.0080\text{kg m}^2$$

S 10.2 Sylinder og eske

En eske med masse m er festet til enden av en masseløs snor som er viklet rundt en sylinder med masse M og radius R. Når systemet slippes fri, beveger esken seg nedover og sylinderen roterer. Hva må massen M til sylinderen være for at sylinderen og esken skal ha samme kinetiske energi? Hva endrer seg hvis sylinderen har radius $2R$?



Løsning: Kinetisk energi til esken og sylinderen skal være like, dvs.

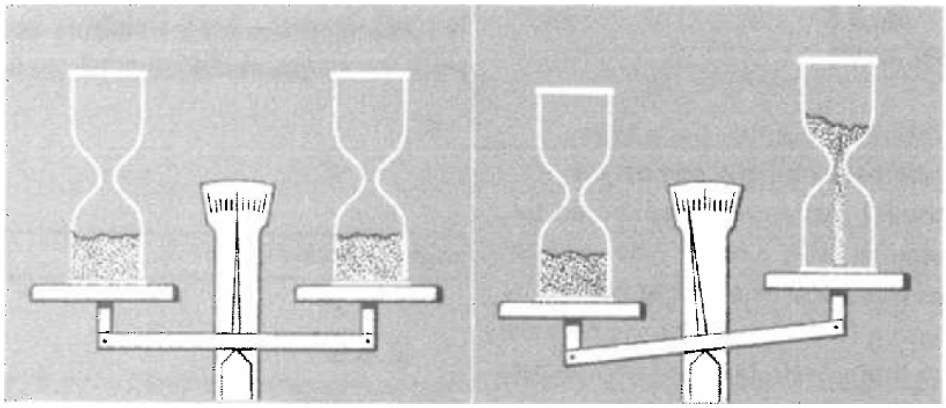
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Siden snora er viklet rundt sylinderen, er lineær- og vinkelfart relatert ved $v = \omega R$. Treghetsmomentet til en full sylinder som roterer om symmetriaksen er $I_s = \frac{1}{2}MR^2$. Vi setter inn og får:

$$\frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow M = 2m.$$

Dette resultatet gjelder uavhengig av radien til sylinderen.

S 10.3 Å veie tid



Vi har to like timeglass. Når vi snur det ene, vil det veie mindre mens sanden renner? Hva skjer akkurat idet sanden slutter å renne?

Løsning: Så lenge sanda renner viser vekta at de veier like mye. Det er to effekter som utlikner hverandre. For det første vil en del av sanda være i lufta, og den bidrar ikke til den tyngden vi leser av på vekta. For det andre vil det være litt av sanda som stoppes opp i bunnen hele tida, og for å stoppe den kreves det en ekstra normalkraft som øker den avleste tyngden. For å vise at disse effektene kansellerer kan vi tenke på massesenteret for timeglasset, inkludert sand. Hvis vi litt forenklet antar at sanda i det øvre kammeret ligger tilnærmet i ro kommer all beegelsen til massesenteret fra den sanda som er i lufta. Dermed vil massesenteret bevege seg nedover med tilnærmet konstant fart, og da må summen av kreftene som virker være lik 0. Det betyr at normalkrafta fra vektskåla må være like stor som for det timeglasset som ikke er snudd. Akkurat idat sanda slutter å renne slutter massesenteret å bevege seg nedover, det gis altså en akselerasjon oppover, og det må derfor ha vært en netto kraft oppover. Normalkrafta fra vektskåla er litt høyere, og vekta viser at timeglasset er litt tyngre et kort øyeblikk. En video av et forsøk som viser dette sammen med en artikkel som beskriver eksperimentet og resultatene kan dere finne her:`https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4973527`. Hovedpoenget i denne artikkelen er riktignok at vekta ikke viser at de veier akkurat like mye mens sanda renner. Dette skyldes at sanda i det øvre kammeret beveger seg nedover med en fart som ikke er helt null, og at mengden sand der avtar. Det betyr at massesenterets fart avtar noe med tida, og det må komme av at normalkrafta er litt større enn tyngden. Men det er en liten effekt, og timeglasset de brukte i eksperimentet er litt ekstremt for å gjøre denne effekten stor (og selv da er det bare ca 1% økning av vekta).

S 10.4 Treghetsmomentet til ei tynn stang

Ei tynn stang roterer om en akse gjennom midtpunktet og vinkelrett på stanga. Stanga har massen M og lengden L. Vis at treghetsmomentet blir

$$I = \frac{1}{12}ML^2.$$

Løsning: Massen til et lite element av stanga med lengden dx er $dm = \frac{M}{L}dx$.

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12}ML^2.$$

S 10.5 Parallellaksesetningen

Treghetsmomentet til et rektangel med massen M og sidekanter a og b omkring en akse gjennom massesenteret vinkelrett på rektangelet er

$$I_{MS} = \frac{1}{12}M(a^2+b^2).$$

For å regne ut treghetsmomentet om en akse gjennom et av hjørnene (fortsatt vinkelrett på rektangelet) kan vi bruke parallellaksesetningen. Den sier at treghetsmomentet om en akse som ikke går gjennom massesenteret er lik treghetsmomentet til en parallell akse gjennom massesenteret pluss MR^2, der M er den totale massen til legemet og R er avstanden mellom rotasjonsaksen og den parallelle aksen gjennom massesenteret.

a) Finn treghetsmomentet til et rektangel om en akse gjennom et av hjørnene og vinkelrett på rektangelet. **Løsning:** Avstanden mellom hørnet og massesenteret er $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Dermed er

$$I = I_{MS} + MR^2 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2) + \frac{1}{4}M(a^2+b^2) = \frac{1}{3}M(a^2+b^2).$$

b) Bevis parallellaksesetningen.

Løsning: Vi bruker koordinater der rotasjonsaksene er parallelle med z-aksen, slik at vi bare trenger å tenke på 2D vektorer i xy-planet. La et masseelement med massen m_i ha posisjonsvektor $\vec{r}_i$, og la massesenteret ha posisjonen $\vec{R}$. Hvis $\vec{\rho}_i$ er vektoren fra massesenteret til masseelementet er $vecr_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i$. Da blir

$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i(R^2 + \rho_i^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{\rho}_i) = MR^2 + I_{MS}$$

fordi

$$\sum m_i \rho_i = 0$$

siden det er posisjonsvektoren til massesenteret i koordinater med massesenteret i origo.

c) Gjenta oppgave S 10.1 hvis kulene ikke kan betraktes som punktmasser, men isteden har en radius på $0,10$ m (slik at de berører hverandre). Treghetsmomentet til ei kule med massen M og radien R om en akse gjennom massesenteret er $\frac{2}{5}MR^2$.

Løsning: I alle tilfellene må vi legge til treghetsmomentet til hver kule om sitt massesenter. Dvs at vi må legge til $\Delta I = 4\frac{2}{5}mR^2$ når $R = 0,10$ m er radien. Setter vi inn tall får vi $\Delta I = 0,0032$ kg m^2.