UNIVERSITETET I OSLO

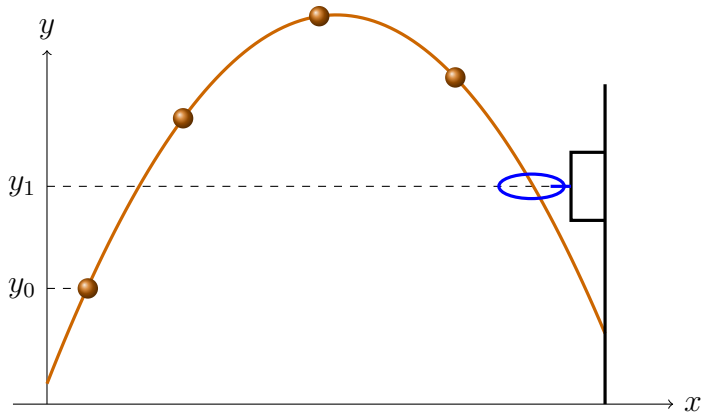
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag ACL, EA, JB, siste versjon 17.05.2026.

Skriftlig eksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2026
Dato: Onsdag 03. juni 2026, kl. 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 6 sider (formelark bakerst på side 7).
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling".
Elektronisk kalkulator av godkjent type.
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes! Alle deloppgaver teller likt. **Lykke til!**

Oppgave 1 Treffe oppi kurven

En kurvballspiller kaster ballen i en parabelbane for å treffe kurven, se figur. Spilleren kaster ballen med en utgangshøyde $y(t=0) = y_0$ i en horisontal posisjon x_0. Kurven henger i en høyde y_1 og senteret av kurven er i horisontal posisjon x_1. Ballen går gjennom kurven (posisjon x_1, y_1) ved en tid t_1. Vi ser bort fra luftmotstand, og spilleren kaster ballen med en utgangsfart v_0 i en vinkel θ i forhold til horisontalen.



(a) Vis at x- og y-komponenten til hastigheten $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$ når ballen går igjennom kurven er gitt ved

$$v_{1x} = v_0 \cos\theta,$$

$$v_{1y} = v_0 \sin\theta - g t_1,$$

der g er tyngdeakselerasjonen.

Løsning: Uten luftmotstand er det kun tyngdekraft som virker, dvs. $a_x = 0$ og $a_y = -g$ som er konstant. Da får vi fra bevegelsesligningene for konstant akselerasjon: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $v_x(t) = v_{0x}$, $v_y(t) = v_{0y} + a_y t$. Med $v_{0x} = v_0\cos\theta$ og $v_{0y} = v_0 \sin\theta$ får vi for $t = t_1$: $v_{1x} = v_0\cos\theta$, $v_{1y} = v_0\sin\theta - gt_1$.

(b) Finn et uttrykk for $x(t_1) = x_1$ og bruk dette til å vise at tiden t_1 når ballen går igjennom kurven kan skrives som

$$t_1 = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta},$$

der $\Delta x = x_1 - x_0$.

Løsning: Fra bevegelsesligningene, horisontal retning:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \Rightarrow x_1 = x_0 + v_{0x}t_1$$

som gir

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v_{0x}} = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}.$$

(c) Finn et uttrykk for høydeforskjellen $\Delta y = y_1 - y_0$ uttrykt ved $\Delta x = x_1 - x_0$, vinkelen θ, tyngdeakselerasjonen g og utgangsfarten v_0.

Løsning: Igjen bruker vi bevegelsesligningene, nå i vertikal retning:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y(t_1) = y_1 = y_0 + v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Vi bruker uttrykket for t_1 fra forrige oppgave og får:

$$y_1 - y_0 = v_{0y}\frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = \frac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta}\Delta x - \frac{g(\Delta x)^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

og dermed

$$\Delta y = \Delta x\left(\tan\theta - \frac{g\Delta x}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right).$$

Oppgave 2 Fermiproblem: brede bildekk og luftmotstand

I en sak fra en avis våren 2026 ble det hevdet at det ikke er lurt med brede dekk på en bil, fordi dette øker luftmotstanden og dermed drivstoffkostnaden (se kulepunkt 2 i skjermdump fra nyhetssaken). Vi vil estimere hvor mye dekkbredden har å si på luftmotstanden. Løs dette som et Fermiproblem hvor vi antar at absoluttverdien til luftmotstanden kan beskrives ved

$$F_D = Dv^2,$$

og vi antar at luftmotstandskoeffisienten D er proporsjonal med bilens flateareal A i bevegelsesretningen som $D \propto A$. Ta utgangspunkt i at typiske bredder på bildekk for store biler er 235-275 mm og vi antar at hjulet har en diameter på 0.80 m.



Løsning: For en stor bil kan vi anta et flateareal i bevegelsesretningen på omtrent 3.0 m^2, cirka 1.5 m høyde og 2.0 m bredde for selve karosseriet. Så spørs det hvor mye av hjulene som "stikker fram" under karosseriet, se illustrasjon:



Vi kan tenke at det er framhjulene som er viktigst, siden de er i fronten og møter lufta og kanskje skjermer mye av arealet for bakhjulene. Forskjellige biler har forskjellig karosserikonstruksjon, for sportsbiler er hjulene godt "gjemt" bak karosseriet mens de har mer flateareal i bevegelsesretningen for f.eks. en terrengbil. Vi antar at halvparten av frontarealet til hjulet er synlig under karosseriet. Da får vi for de smale dekkene:

$$2 \text{ hjul} \cdot (0.8 \cdot 0.235) \cdot \ \mathrm{m}^2 = 0.376 \ \mathrm{m}^2,$$

og med kun halvparten av arealet "synlig" får vi $A_{\text{Hjul, eff}} = 0.188 \ \mathrm{m}^2$. Totalt for bilen: $A_{\text{Bil, smale dekk}} = 3.188 \ \mathrm{m}^2$. For en bil med dekkbredde 275 mm og ellers samme frontarealfår vi $A_{\text{Bil, brede dekk}} = 3.220 \ \mathrm{m}^2$, Ser på forholdet:

$$\frac{A_{\text{Bil, brede dekk}}}{A_{\text{Bil, smale dekk}}} = 1.01,$$

dvs. bare 1% større frontareal. Dersom bakhjulene også teller, la oss si de gir like mye bidrag som fronthjulene, får vi

$$\frac{A_{\text{Bil, brede dekk}}}{A_{\text{Bil, smale dekk}}} = \frac{3.440}{3.376} = 1.02,$$

dvs. en 2% økning av arealet. Siden $F_D \propto D \propto A$ så øker da luftmotstanden med kun 1-2%. I følge Viking redningstjeneste kan rullemotstand utgjøre opp til 7.5% i drivstoff-forbruk (fra klasse A til E, se første kulepunkt), så det er nok en mye viktigere faktor enn økt luftmotstand pga. bredden på dekket.

Oppgave 3 En romrakett

Du er ansvarlig for å fylle drivstoff på en rakett som er dokket ved en romstasjon i verdensrommet langt vekk fra stjerner og planeter. For at mannskapet kan komme hjem til jorden må raketten akselerere opp til en hastighet på 6000 m/s før drivstoffet er tomt. Eksos drives ut med en relativ hastighet på 2000 m/s i forhold til raketten, og romfartøyet veier 100.0 tonn uten drivstoff. Du skal beregne hvor mye drivstoff du må fylle for at raketten kommer tilbake til jorden.

(a) Til denne oppgaven trenger du å bruke rakettligningen:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Forklar den fysiske betydningen av ligningen med egne ord, og forklar også hvorfor vi kan gjøre tilnærmingen $\vec{F}_{ext} \approx \vec{0}$. Hvorfor må du bruke integralregning for å løse oppgaven?

Løsning: Denne ligningen er helt analog med Newtons 2. lov, med summen av krefter på venstre side og masse ganget med akselerasjon på høyre side. Dersom det ikke er noen ytre krefter, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, vil leddet $\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}$ ha samme effekt som å skyve raketten med en kraft med en absoluttverdi som er proposjonal med den relative hastigheten til gassen og raten til massetapet. Vi må bruke integralregning fordi massen til raketten endrer seg over tid.

(b) Hvor mye drivstoff må du fylle for at raketten skal gi tilstrekkelig hastighet?

Løsning: Dypt i verdensrommet virker ingen ytre krefter. Hastigheten til raketten og eksosen er i motsatt retning (eksos bakover og rakett framover):

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt},$$

som er en 1. ordens separabel diff-ligning. Vi separerer variablene og integrerer:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{dv}{dt}dt = -v_{rel}\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}dt = -v_{rel}\int_{m_0}^{m_1}\frac{dm}{m} = -v_{rel}\ln\frac{m_1}{m_0}.$$

Dermed er

$$v(t_1) - v(t_0) = -v_{rel}\ln\frac{m_1}{m_0}.$$

Raketten starter i ro, så $v(t_0) = 0$ m/s. Vi skal finne m_0 og får:

$$\frac{v(t_1)}{v_{rel}} = \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) \Rightarrow m_0 = m_1 e^{\frac{v(t_1)}{v_{rel}}}.$$

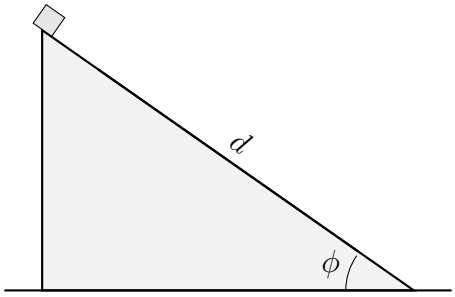
Når vi setter inn $v(t_1) = 6000$ m/s, $v_{rel} = 2000$ m/s, og $m_1 = 100.0$ tonn, får vi

$$m_0 = 2009 \text{ tonn.}$$

Totalvekten i begynnelsen må være 2009 tonn; du må altså fylle 1909 tonn drivstoff.

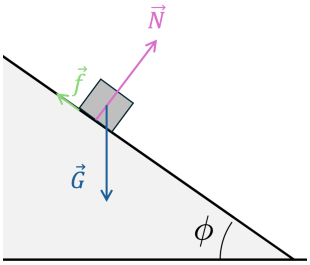
Oppgave 4 En kloss, et skråplan og en stang

En liten kloss med masse m plasseres i ro på toppen av et skråplan med lengde d og helningsvinkel ϕ, se figur. Skråplanet er festet i bakken og beveger seg ikke. Vi ser bort fra luftmotstand, men det er friksjon mellom klossen og skråplanet, med dynamisk friksjonskoeffisient μ_d. Friksjonen er liten nok til at klossen sklir ned skråplanet.



(a) Tegn et frilegemediagram for klossen når den sklir nedover skråplanet. Husk å navngi alle krefter.

Løsning: Uten luftmotstand har vi tre krefter som virker på klossen: tyngdekraft $\vec{G}$, normalkraft $\vec{N}$, og friksjon $\vec{f}$, se figur.



(b) Hva er arbeidet som den dynamiske friksjonskraften f gjør på klossen når den sklir ned skråplanet med lengde d? Uttrykk svaret ditt ved hjelp av konstantene μ_d, m, g, d og ϕ.

Løsning: Siden den dynamiske friksjonskraften er konstant og lik $|\vec{f}| = \mu_d N$, og med $N = mg\cos\phi$ fra Newtons 1. lov i retningen normalt på planet, får vi at arbeidet er gitt ved

$$W_f = \int_0^d f\,dx = -\mu_d mgd\cos\phi.$$

(c) Vis at farta v_1 som klossen får når den har sklidd ned skråplanet er

$$v_1 = \sqrt{2gd(\sin\phi - \mu_d \cos\phi)}.$$

Sammenlign dette med farta i det tilfellet der det ikke er friksjon.

Løsning: Denne kan løses på flere måter. Her bruker vi arbeid-energi-teoremet:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0.$$

Ned skråplanet virker tyngdekraft og friksjon. Med positiv retning i bevegelsesretning:

$$W_{0,1} = \int_0^d (mg\sin\phi - \mu_d mg\cos\phi)dx = mgd(\sin\phi - \mu_d\cos\phi).$$

Dette er lik forskjell i kinetisk energi, og med $K_0 = 0$ får vi:

$$W_{0,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgd(\sin\phi - \mu_d\cos\phi) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd(\sin\phi - \mu_d\cos\phi)}.$$

Dersom det ikke er friksjon er $\mu_d = 0$ og $v_1 = \sqrt{2gd\sin\phi}$. Vi ser at $d\sin\phi$ er lik høyden til skråplanet, så vi får tilbake det velkjente resultatet $v_1 = \sqrt{2gh}$ som gjelder når mekanisk energi er bevart.

(d) Etter skråplanet sklir klossen på en horisontal, friksjonsfri flate til den kolliderer med den nedre enden på ei tynn stang med masse M og lengde b, se illustrasjon under. Stanga er hengt opp i et friksjonsfritt hengsel. Det er lim på stanga slik at den lille klossen klistrer seg fast på enden, og systemet kloss-pluss-stang svinger så opp. Hvilke(n) størrelse(r) er bevart for systemet kloss-pluss-stang i denne kollisjonen: mekanisk energi, driv (bevegelsesmengde), og/eller spinn? Begrunn svaret.



Løsning: I denne situasjonen er det kun spinn som er bevart. Siden det er en fullstendig uelastisk kollisjon er det tap av mekanisk energi. Klossen treffer nederst på stanga, og det virker da en kontaktkraft i hengselet (som er en ytre kraft på system kloss pluss stang) i kollisjonsøyeblikket rettet mot høyre, som gjør at stangas øvre ende ikke vippes over mot venstre. Dermed er ikke driv bevart. Men det er ingen ytre kraftmoment om rotasjonsaksen gjennom hengselet for systemet stang-pluss-kloss, dermed er spinn bevart.

(e) Vi regner klossen som så liten i utstrekning at den kan beskrives som en punktpartikkel, og stanga er så tynn at vi antar den kun har utstrekning i lengderetningen. Treghetsmomentet til ei tynn stang av lengde b som roterer om en akse gjennom massesenteret er gitt ved $I_{cm} = \frac{1}{12}Mb^2$. Vis at treghetsmomentet til systemet stang-pluss-kloss om rotasjonsaksen gjennom hengselet er gitt ved

$$I_O = \left(\frac{M}{3} + m\right) b^2.$$

Løsning: Vi bruker først parallellakseteoremet på stanga for rotasjonsakse i hengselet:

$$I_{\text{stang}} = I_{cm} + M(\frac{b}{2})^2 = Mb^2(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3}Mb^2.$$

Så legger vi til bidraget fra klossen på enden, vi regner klossen som en punktpartikkel og da får vi:

$$I_O = I_{\text{stang}} + I_{\text{kloss}} = \frac{1}{3}Mb^2 + mb^2 = \left(\frac{M}{3} + m\right) b^2.$$

(f) Hva er vinkelfarta ω som systemet stang-pluss-kloss får rett etter kollisjonen?

Løsning: Fra spinnbevaring om rotasjonsaksen gjennom hengselet har vi at totalspinn før er lik totalspinn etter kollisjonen. Vi legger x-aksen i horisontal retning (positiv til høyre) og y-aksen i vertikal retning (positiv oppover), med origo i hengselet. Før kollisjonen er det kun klossen som har spinn:

$$\vec{L}_{\text{før}} = \vec{L}_{\text{kloss}} = \vec{r}_{\text{kloss}} \times \vec{p}_{\text{kloss}} = -b\hat{j} \times mv_1\hat{i} = bmv_1\hat{k}.$$

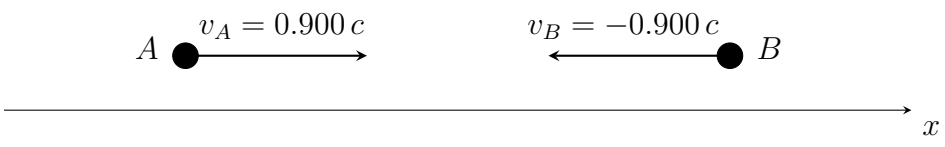
Etter kollisjonen svinger systemet av kloss pluss stang opp og vi har $\vec{L}_{\text{etter}} = I_O\vec{\omega}$, med $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Vi får da:

$$bmv_1\hat{k} = \left(\frac{M}{3} + m\right) b^2\omega\hat{k} \Rightarrow \omega = \frac{mv_1}{\left(\frac{M}{3} + m\right) b} = \frac{m\sqrt{2gd(\sin\phi - \mu_d\cos\phi)}}{\left(\frac{M}{3} + m\right) b},$$

i positiv z-retning ($\hat{k}$) slik vi her har definert koordinatsystemet.

Oppgave 5 To partikler i farta

En partikkel A og en partikkel B har blitt akselerert slik at de har en konstant fart på 90.0% av lysets fart, $0.900c$ målt fra laboratoriet. De sendes så rett mot hverandre, se figur.



(a) Vi bytter nå referansesystem til et system som følger partikkel A, og kaller dette systemet S'. Hva er hastigheten til partikkel A, v'_A, og partikkel B, v'_B, målt fra dette referansesystemet?

Løsning: I referansesystem S' som følger med partikkel A, er hastigheten til partikkel A null: $v'_A = 0.00$ m/s. For hastigheten til partikkel B sett fra A bruker vi Lorentztransformasjonen for hastighet, med relativhastighet $u = v_A = 0.900c$:

$$v'_B = \frac{v_B - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_B} = \frac{-0.900c - 0.900c}{1 - \frac{0.900c \cdot (-0.900c)}{c^2}} = -0.994c.$$

(b) Vi antar nå at partiklene har en mye mindre fart på bare $0.100c$ målt i laboratoriesystemet, og så sendes de igjen mot hverandre. Hva blir v'_B nå? Hva blir forholdet mellom denne hastigheten og den man får ved å bruke den klassiske Galileotransformasjonen for hastighet, dvs. $v' = v - u$, hvor u er relativhastigheten?

Løsning: Nå blir

$$v'_B = \frac{v_B - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_B} = \frac{-0.100c - 0.100c}{1 - \frac{0.100c \cdot (-0.100c)}{c^2}} = -0.198c.$$

Hvis vi bruker Galileotransformasjonen får vi:

$$v'_B = -0.100c - 0.100c = -0.200c,$$

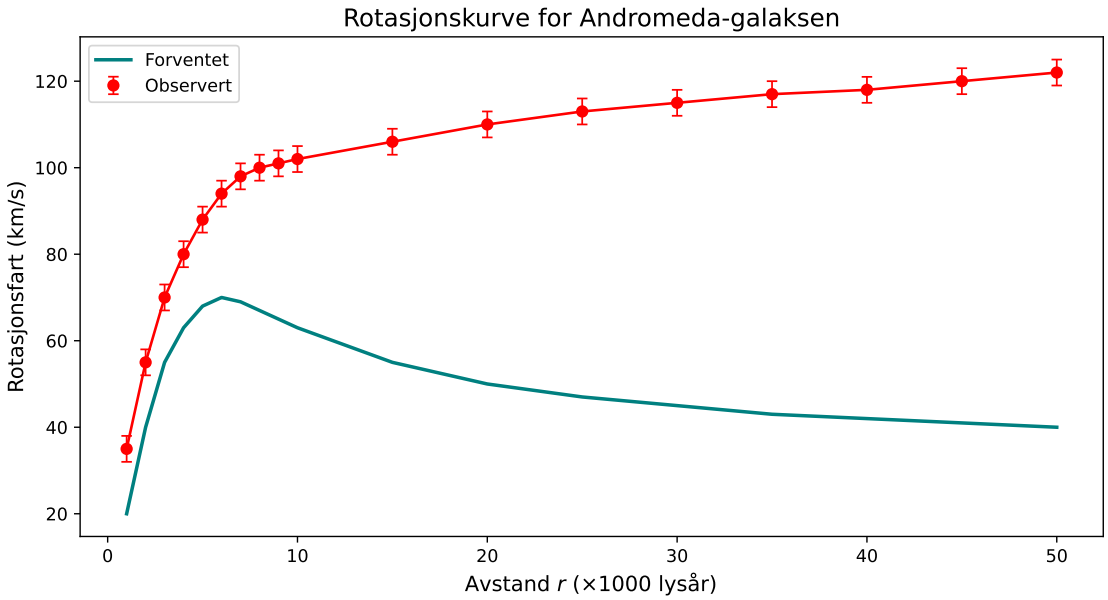
som gir et forhold på

$$\frac{-0.200c}{-0.198c} = 1.01,$$

altså bare 1.00% for høy hastighet i forhold til den riktige hastigheten. Dersom man ikke trenger veldig høy presisjon, er det derfor ofte greit å bruke Galileotransformasjoner for hastigheter under 10% av lyshastigheten.

Oppgave 6 Galaksers rotasjonshastigheter og modifisert tyngdekraft

Målinger av rotasjonshastighetene til stjernene og gassen i en galakse viser at galaksene roterer mye fortere enn forventet ut fra den synlige massen de inneholder. Dette er en av grunnene til at såkalt *mørk materie* har blitt foreslått å eksistere i universet. Figuren viser den målte farten til stjerner og gass i Andromeda-galaksen som funksjon av avstanden r fra senteret av galaksen, og også den forventede farten ut fra fordelingen av galaksens synlige masse kombinert med Newtons gravitasjonslov.



(a) Vi antar at en stjerne med masse m går i en sirkelbane med radius r rundt senteret av galaksen, og vi forenkler galaksen veldig med å anta at resten av massen til galaksen er samlet i senteret av sirkelen som en supermassivt svart hull med masse M_{tot}. Vis at banefarta til stjernen i henhold til Newtons mekanikk er gitt ved

$$v_{\text{Newton}}(r) = \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}},$$

hvor G er gravitasjonskonstanten.

Løsning: Fra Newtons gravitasjonslov er tyngdekraften gitt ved

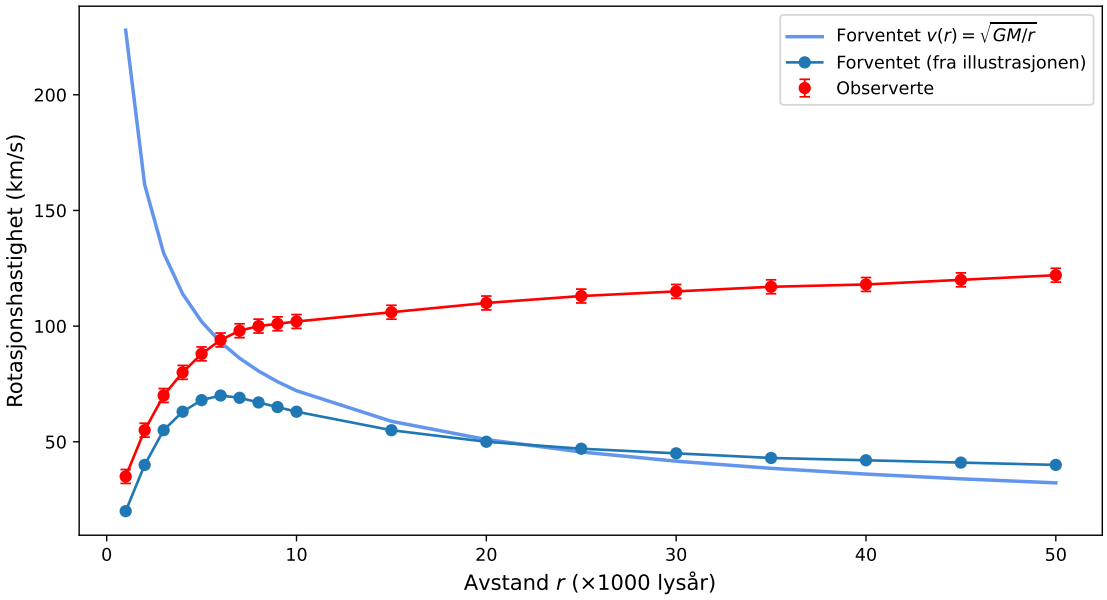
$$F_G = G\frac{mM_{\text{tot}}}{r^2}.$$

Fra Newtons 2. lov får vi at

$$F_{\text{net}} = F_G = ma = m\frac{v_{\text{Newton}}^2}{r} \Rightarrow \frac{v_{\text{Newton}}^2}{r} = G\frac{M_{\text{tot}}}{r^2} \Rightarrow v_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}}.$$

(b) Lag en skisse av hvordan banefarta v_{Newton} er som funksjon av r fra uttrykket i forrige oppgave. Synes du skissen din stemmer med den forventede kurven fra figuren over? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Løsning: Fra uttrykket får vi at $v_{\text{Newton}}(r) \propto 1/\sqrt{r}$:



Denne funksjonen stemmer dårlig med den forventede kurven i figuren for små avstander til galakse-senteret, men formen ser OK ut for store avstander. Dette skyldes at vår antagelse om at all massen er sentrert i midten blir mest feil for stjerner nær galaksesenteret, siden det egentlig er en betydelig del av galaksens masse lengre ut.

(c) Vi vil nå forbedre modellen vår og ta hensyn til at massen i en virkelig galakse er spredt utover og ikke samlet i ett punkt. Vi antar nå at en stjerne i en gitt avstand r blir kun påvirket av massen *innenfor* sin bane, og vi antar at denne massen kan beskrives som

$$M(r) = M_{\text{tot}} \frac{r^3}{r^3 + r_0^3},$$

der r_0 er en konstant, og M_{tot} er den totale synlige massen til galaksen. Vis at det nye uttrykket for banefarta til stjernen er gitt ved

$$v_{\text{Newton}}(r) = \sqrt{GM_{\text{tot}} \frac{r^2}{r^3 + r_0^3}}.$$

Løsning: Vi setter inn den nye funksjonen for $M(r)$ i uttrykket fra den første oppgaven, og da får vi:

$$v_{\text{Newton}}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{GM_{\text{tot}} \frac{r^3}{r(r^3 + r_0^3)}} = \sqrt{GM_{\text{tot}} \frac{r^2}{r^3 + r_0^3}}.$$

(d) Ved bruke en Taylor-rekkeutvikling av uttrykket for $v_{\text{Newton}}(r)$ i forrige deloppgave, vis at

$$v_{\text{Newton}}(r) \approx \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}\left[1 - \frac{r_0^3}{r^3} + \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 - ...\right]}.$$

Hvordan blir dette uttrykket sammenlignet med uttrykket i oppgave a) for store avstander $r \gg r_0$?
Hint: Bruk at

$$\frac{1}{r^3 + r_0^3} = \frac{1}{r^3}\frac{1}{(1 + r_0^3/r^3)}$$

og gjør rekkeutviklingen om $r_0^3/r^3 = 0$.

Løsning: Vi bruker hintet og skriver om uttrykket for v til

$$v_{\text{Newton}}^2 = GM_{\text{tot}}\frac{r^2}{r^3 + r_0^3} = GM_{\text{tot}}\frac{r^2}{r^3}\frac{1}{1 + r_0^3/r^3} = \frac{GM_{\text{tot}}}{r}\frac{1}{(1 + r_0^3/r^3)}.$$

Nå setter vi $x = r_0^3/r^3$ og bruker binomialrekka fra Rottmann (evt. bruker Taylors formel direkte) og får:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

for $|x| < 1$ og får videre:

$$\frac{1}{1 + \frac{r_0^3}{r^3}} = 1 - \frac{r_0^3}{r^3} + \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 - ...$$

og dermed

$$v_{\text{Newton}}^2(r) \approx \frac{GM_{\text{tot}}}{r}\left[1 - \frac{r_0^3}{r^3} + \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 - ...\right] \Rightarrow v_{\text{Newton}}(r) \approx \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}\left[1 - \frac{r_0^3}{r^3} + \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 - ...\right]}.$$

Når $r \gg r_0$ så blir alle ledd med r_0^3/r^3 veldig små, og vi kan gjøre tilnærmingen (tar kun med første ledd):

$$v_{\text{Newton}}^2(r) \approx \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \Rightarrow v_{\text{Newton}}(r) \approx \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{r}},$$

som nettopp er uttrykket vi fant i a)-oppgaven.

(e) Noen forskere har foreslått at i stedet for å introdusere mørk materie, så kan galaksenes rotasjonkurver forklares med å endre på Newtons gravitasjonslov. I en "Modified Newtonian Dynamics"-modell beskrives den modifiserte tyngdeakselerasjonen g_{MOND} som

$$g_{\text{MOND}} = f(\alpha)g_{\text{Newton}},$$

hvor $\alpha = g_{\text{Newton}}/a_0$, a_0 er en konstant og $g_{\text{Newton}} = v_{\text{Newton}}^2/r$ er den tyngdeakselerasjonen vi får fra Newtons gravitasjonslov når vi bruker den synlige materien vi har i galaksen. Funksjonen $f(\alpha)$ er gitt som

$$f(\alpha) = \frac{1}{11}\frac{1}{1 - e^{-\sqrt{\alpha}}}.$$

Vis at for små avstander hvor $\alpha \gg 1$ kan den modifiserte banefarta tilnærmes som

$$v_{\text{MOND}} \approx \left(\sqrt{1+e^{-\sqrt{\alpha}}}\right) v_{\text{Newton}} \approx \left(1+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\alpha}}\right) v_{\text{Newton}}.$$

Løsning:

For små avstander blir $\alpha \gg 1$ og dermed $e^{-\sqrt{\alpha}} \ll 1$. Vi har at $\frac{1}{1-e^{-\sqrt{\alpha}}} \approx 1+e^{-\sqrt{\alpha}}$ fra rekkeutvikling (bruker igjen $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-...$ med $x = -e^{-\sqrt{\alpha}}$ og beholder kun de første leddene). I den modifiserte teorien får vi da at

$$\frac{v_{\text{MOND}}^2}{r} = g_{\text{MOND}} \approx (1+e^{-\sqrt{\alpha}}) g_{\text{Newton}}.$$

Dermed er $v_{\text{MOND}} \approx \left(\sqrt{1+e^{-\sqrt{\alpha}}}\right) v_{\text{Newton}}$. Hvis vi nå Taylor-rekkeutvikler en gang til, bruker igjen en kjent rekke fra Rottmann:

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!2^2}x^2+...$$

så får vi (med $x = e^{-\sqrt{\alpha}}$):

$$\left(1+e^{-\sqrt{\alpha}}\right)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\alpha}}$$

og dermed

$$v_{\text{MOND}} \approx \left(\sqrt{1+e^{-\sqrt{\alpha}}}\right) v_{\text{Newton}} \approx \left(1+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\alpha}}\right) v_{\text{Newton}},$$

som var det vi skulle vise.

(f) Vi skal nå se på hvor mye den modifiserte gravitasjonsloven påvirker en stjernes omløpstid i Melkeveien (vår galakse). Vi antar at stjernen beveger seg i en sirkelbane med baneradius $r_{\text{Stjerne}} = 10.0 \times 10^{18}$ m og omløpstid på $T_{\text{Stjerne}} = 20.0 \times 10^6$ år, slik at omløpstiden T er gitt ved

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Et anslag for konstanten a_0 er $a_0 = 1.20 \times 10^{-10}$ m/s^2. Hva blir forholdet mellom omløpstiden gitt ved Newtons gravitasjonslov T_{Newton} og omløpstiden T_{MOND} i den modifiserte gravitasjonsloven?

Løsning:

Omløpstida i følge Newtons gravitasjonslov er

$$T_{\text{Newton}} = \frac{2\pi r}{v_{\text{Newton}}}.$$

Med $v_{\text{MOND}} \approx (1+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\alpha}}) v_{\text{Newton}}$ får vi at omløpstida i den modifiserte teorien blir

$$T_{\text{MOND}} = \frac{2\pi r}{v_{\text{MOND}}} \approx \frac{2\pi r}{v_{\text{Newton}}\left(1+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\alpha}}\right)}.$$

Vi ser på forholdet

$$\frac{T_{\text{Newton}}}{T_{\text{MOND}}} \approx 1 + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\alpha}}.$$

Siden $\alpha = g_{\text{Newton}}/a_0$, må vi regne ut g_{Newton} for stjernen:

$$g_{\text{Newton}} = \frac{v_{\text{Stjerne}}^2}{r_{\text{Stjerne}}} = \frac{4\pi^2 r_{\text{Stjerne}}}{T_{\text{Stjerne}}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10 \times 10^{18}\ \text{m}}{(20 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s})^2} = 9.92 \times 10^{-10}\ \text{m/s}^2.$$

Da får vi at $\alpha = g_{\text{Newton}}/a_0 = 8.27$ og $e^{-\sqrt{\alpha}} = 0.0563$. Det betyr at forholdet $\frac{T_{\text{Newton}}}{T_{\text{MOND}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.0563 \approx 1.03$, omtrent 3% større omløpstid med Newtons gravitasjonslov.

Eksamenssett slutt.