UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag
(ACL & EA & JB, 03.03.2026)

Presisering til oppgave 14 og 15, ser bort fra friksjon og luftmotstand.
Feil i oppgave 7, riktig i løsningsforslaget her
(ACL, 18.03.2026)

Skriftlig midtveiseksamen i FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2026
Dato: Onsdag 18. mars 2026, kl 15:00-18:00 (3 timer)
Digital eksamen i Inspera, 20 flervalgsoppgaver.
Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: "Matematisk formelsamling"
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Oppgave 1 Slippe en tennisball (I)

Du står på jordoverflaten og slipper en tennisball rett ned. Vi ser bort fra luftmotstand. Hvilken påstand er riktig?

- Tennisballen faller med konstant fart.
- Tennisballen faller med konstant akselerasjon.
- Akselerasjonen til tennisballen blir større og større ettersom den nærmer seg bakken.
- Tennisballen får mindre og mindre fart ettersom den nærmer seg bakken.
- Akselerasjonen til tennisballen blir mindre og mindre ettersom den nærmer seg bakken.

Løsning: Uten luftmotstand virker kun tyngdekraft på tennisballen og akselerasjonen $a = -g$ som er konstant.

Oppgave 2 Slippe en tennisball (II)

Igjen står du på jordoverflaten og slipper en tennisball rett ned, men nå tar vi hensyn til luftmotstanden og antar at den kan beskrives ved $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ hvor D er en konstant og $\vec{v}$ er hastigheten til ballen. Vi velger positiv retning oppover. Akselerasjonen til ballen i dette tilfellet er gitt ved

- $a = \frac{D}{m}v^2 - g$
- $a = \frac{D}{m}v^2 + g$
- $a = \frac{D}{v^2} - g$
- $a = \frac{Dm}{v^2} - mg$
- $a = -g$

Løsning: Newtons 2. lov i vertikal retning:

$$F_D + G = ma$$

$$Dv^2 - mg = ma \Rightarrow a = \frac{Dv^2}{m} - g.$$

Oppgave 3 En fotball i farta

En Bodø/Glimt-spiller sparker en fotball fra bakkenivå med en utgangshastighet som har en vinkel θ_0 med horisontalen og med en absoluttverdi v_0. Vi ser bort fra luftmotstand. Tida t_1 det tar fra ballen blir sparket, til den lander på bakken igjen, er gitt ved

- $t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta_0$
- $t_1 = \frac{v_0}{2g}\cos\theta_0$
- $t_1 = \frac{2v_0}{g}\tan\theta_0$
- $t_1 = 2v_0 g$

Løsning: Fra bevegelsesligningene for konstant akselerasjon er høyden y gitt ved:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Vi legger nullpunktet ved bakkenivå og ved tiden t_1 lander ballen på bakken igjen. Da er

$$v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0$$

og med $v_{0y} = v_0\sin\theta_0$ får vi:

$$v_0\sin\theta_0 = \frac{1}{2}gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta_0.$$

Oppgave 4 Kasser på et skråplan

To kasser er stablet oppå hverandre, og sklir ned et skråplan med helningsvinkel θ. Kassa som sklir, kasse 1, har masse m_1 og kassa som er oppå, kasse 2, har masse m_2. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kasse 1 og skråplanet er μ_d. Det er stor nok friksjon mellom kasse 1 og 2 slik at kasse 2 blir liggende på kasse 1 uten å skli. Akselerasjonen til kassene ned skråplanet er

- $a = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$
- $a = m_1 g \sin\theta - \mu_d(m_1 + m_2)\cos\theta$
- $a = \frac{m_1 g}{\mu_d(m_1+m_2)} \tan\theta$
- $a = \frac{g}{\mu_d} \sin\theta$
- $a = \frac{m_1}{m_1+m_2} g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$

Løsning: Fra N2L på det samlede systemet med totalmasse $m_1 + m_2$ i retning ned langs skråplanet:

$$(m_1 + m_2)g\sin\theta - f_d = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = g\sin\theta - \frac{f_d}{m_1 + m_2}.$$

Fra N2L på det samlede systemet i retning normalt på skråplanet får vi normalkrafta fra skråplanet:

$$N - (m_1 + m_2)g\cos\theta = 0 \Rightarrow N = (m_1 + m_2)g\cos\theta.$$

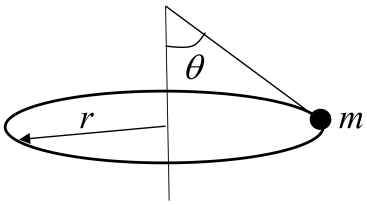
Den dynamiske friksjonen har absoluttverdi $\mu_d N$, og størrelsen på friksjonskrafta blir

$$f_d = \mu_d N = \mu_d(m_1 + m_2)g\cos\theta.$$

Da får vi at

$$a = g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta).$$

Oppgave 5 En tennisball i en snor



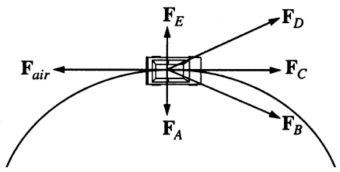
Du har en tennisball med masse m som er festet i en snor. Du svinger den i en horisontal sirkel med radius r (kjeglependel). Vi ser bort fra luftmotstanden. Hva er arbeidet utført på tennisballen i løpet av en svingeperiode (en runde rundt sirkelen)?

- $W = 2\pi r\, mg\sin\theta$

- $W = 2\pi r\, mg\cos\theta$
- $W = 2\pi r\, mg$
- $W = m\frac{v^2}{r}2\pi r$
- $W = 0$ J

Løsning: Siden vi ser bort fra luftmotstand er det ingen krefter som har en komponent i hastighetsretning, og arbeidet er null.

Oppgave 6 En bil i en sving



En bil kjører med konstant fart gjennom en kurve. I figuren, som viser bilen ovenfra, viser vektoren $\vec{F}_{air}$ luftmotstandskraften som virker på bilen. Hvilken av de andre vektorpilene viser den horisontale kraften fra veien på bilens hjul?

- $\vec{F}_A$
- $\vec{F}_B$
- $\vec{F}_C$
- $\vec{F}_D$
- $\vec{F}_E$

Løsning: $\vec{F}_B$. Vi trenger en kraftkomponent i tangentiell retning for å kompensere for luftmotstanden, og en komponent i radiell retning for at ballen skal bevege seg på en sirkelbane.

Oppgave 7 Ei kule synker i olje

Ei lita kule holdes i ro, og så slippes den og synker rett nedover i en beholder med olje. Den viskøse kraften fra oljen på kula er gitt ved $\vec{F}_v = -k_v\vec{v}$ der k_v er en konstant. Vi velger positiv retning nedover. Hastigheten til kula er gitt ved

- ~~$v(t) = \frac{mg}{k_v}\left[e^{-\frac{k_v}{m}t} - 1\right]$~~ NB! Her skulle det stå $v(t) = \frac{mg}{k_v}\left[1 - e^{-\frac{k_v}{m}t}\right]$
- $v(t) = \frac{mg}{k_v}t$

- $v(t) = \frac{mg}{k_v}\left[e^{\frac{k_v}{m}t} + 1\right]$
- $v(t) = mg\,k_v\left[e^{\frac{k_v}{m}t} + 1\right]$
- $v(t) = \frac{mg}{k_v}e^{-\frac{k_v}{m}t}$

Løsning: Fra Newtons 2. lov i vertikal retning med positiv retning nedover får vi:

$$mg - k_v v = ma \Rightarrow a = g - \frac{k_v}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{k_v}{m}v - g\right)$$

Separerer variablene:

$$\frac{dv}{\frac{k_v}{m}v - g} = -dt$$

Substituerer:

$$u = \frac{k_v}{m}v - g \Rightarrow dv = \frac{m}{k_v}du$$

Vi setter inn og får:

$$\frac{m}{k_v}\frac{du}{u} = -dt$$

Integrerer:

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du'}{u'} = -\frac{k_v}{m}\int_0^t dt'$$

$$\ln\left[\frac{u(t)}{u(0)}\right] = -\frac{k_v}{m}t \Rightarrow u(t) = u(0)e^{-\frac{k_v}{m}t}$$

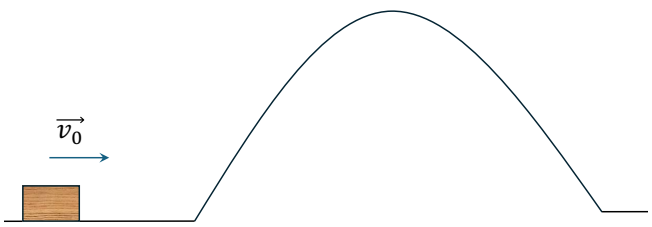
Fra initialbetingelsene har vi at $u(0) = -g$, og dermed

$$u(t) = -ge^{-\frac{k_v}{m}t} = \frac{k_v}{m}v - g$$

hvor vi har brukt substitusjonen $u = \frac{k_v}{m}v - g$ på høyre side. Vi løser for $v = v(t)$ og får

$$v(t) = \frac{mg}{k_v}\left[e^{-\frac{k_v}{m}t} - 1\right].$$

Oppgave 8 Over toppen



En kloss sklir på et friksjonsfritt underlag med en fart v_0 og luftmotstanden er så liten at vi kan se bort fra den. Så kommer klossen til en hump, se figur. Høyden ved det høyeste punktet på humpen er h. Hvor stor må farta v_0 minst være for at klossen skal greie å komme seg over humpen og over på den andre siden?

- $v_0 > \sqrt{2gh}$
- $v_0 > \sqrt{mgh}$
- $v_0 > mgh^2$
- $v_0 > \sqrt{gh/2}$

Løsning: Fra bevaring av mekanisk energi har vi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > mgh$$

$$\Rightarrow v_0 > \sqrt{2gh}$$

Oppgave 9 Ei kule i et romskip

En astronaut på vei til Alpha Centauri har med seg ei kule med masse $m = 0.20$ kg i romskipet sitt. Kula er festet til ei snor med lengde $d = 1.5$ m. Romskipet kjører med konstant fart, og det er så langt vekk fra stjerner og planeter at gravitasjon spiller ingen rolle. Vi ser også bort fra luftmotstand. Astronauten svinger kula rundt på en sirkelbane, og snora ryker dersom snordraget S blir 12 N. Den kritiske vinkelfarta ω som gjør at snora ryker er

- 6.3 rad/s
- 4.5 rad/s
- 12 rad/s
- 0.33 rad/s
- 0.91 rad/s

Løsning: Det er kun snordraget S som virker på kula og Newtons 2. lov gir oss:

$$S = ma = m\frac{v^2}{d} = md\omega^2$$

Vi løser for vinkelfarta og får $\omega = \sqrt{\frac{S}{md}} = 6.32$ rad/s.

Oppgave 10 En dristig sirkusartist

En sirkusartist kjører en motorsykkel med konstant fart i en vertikal sirkel inne i en stor sirkulær tønne med radius $R = 12.0$ m. Tyngdeakselerasjonen er $g = 9.81$ m/s^2. Den minste farta sirkusartisten må kjøre med for å ikke miste kontakten med underlaget i toppen av banen er

- $v = 10.9$ m/s
- $v = 0.904$ m/s
- $v = 1.11$ m/s
- $v = 117$ m/s
- $v = 15.3$ m/s

Løsning: På toppen av banen får vi fra Newtons 2. lov:

$$N + mg = ma = m\frac{v^2}{R}.$$

For at sirkusartisten ikke skal miste kontakten må $N > 0$:

$$mg - m\frac{v^2}{R} > 0 \Rightarrow v > \sqrt{gR} = 10.85 \text{ m/s} = 10.9 \text{ m/s}.$$

Oppgave 11 Arbeid

Hva krever mest arbeid: å starte fra ro (0.0 m/s) og nå en fart på 10 m/s, eller å gå fra en initiell fart på 10 m/s og nå en fart på 20 m/s?

- Å gå fra ro til 10 m/s
- Fra 10 m/s til 20 m/s
- Begge situasjoner krever det samme arbeidet

Løsning: Fra 10 m/s til 20 m/s krever mest arbeid siden det gir størst endring i kinetisk energi. Fra arbeid-energi-teoremet:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2).$$

A gå fra ro til 10 m/s gir $v_1^2 - v_0^2 = 100$ m^2/s^2, mens å gå fra 10 m/s til 20 m/s gir $v_1^2 - v_0^2 = 300$ m^2/s^2.

Oppgave 12 Flytte på en eske

Kari løfter en boks fra bakken rett oppover med konstant fart til en høyde H. Berit bruker et masseløst tau festet til boksen og drar den samme boksen opp en friksjonsløs rampe fra bakken til den samme høyden H. Vi ser bort fra luftmotstand. Hvem har gjort mest arbeid på boksen?

- Kari
- Berit
- Begge har gjort et like stort arbeid

Løsning: Begge har gjort et like stort arbeid siden forskjellen i potensiell energi er den samme i begge tilfeller.

Oppgave 13 Berg- og dalbane

Ei vogn i en berg- og dalbane plasseres i en høyde h på et friksjonsfritt spor. Vi ser bort fra luftmotstand. Vogna starter i ro og så slippes bremsene så den kan trille fritt, og vogna når en fart v i bunnen av banen. Hvis vogna skal slippes fra en ny høyde og ha dobbelt så stor fart i bunnen av banen, ved hvilken ny høyde må vogna plasseres?

- $\sqrt{2}h$
- $2h$
- $2\sqrt{2}h$
- $4h$
- $8h$

Løsning: Fra bevaring av mekanisk energi med startfart 0.0 m/s:

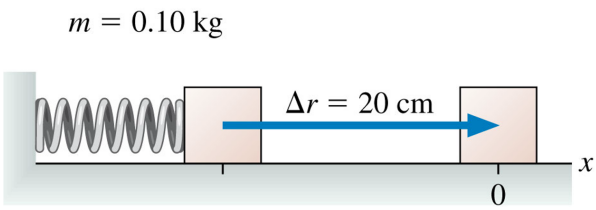
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

For å få dobbelt så stor fart:

$$v_2 = 2v = 2\sqrt{2gh} = \sqrt{2g \cdot 4h}$$

Altså er den nye høyden $4h$.

Oppgave 14 **En kloss og en fjær (I)**



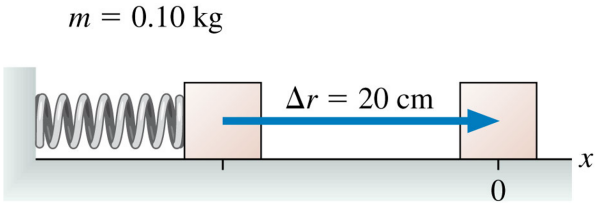
En fjær med fjærkonstant $k = 20$ N/m er festet til en vegg. En kloss med masse $m = 0.10$ kg trykkes inn i fjæren slik at den blir komprimert til $x = -20$ cm. Så slippes systemet løs. Den kinetiske energien klossen får når fjæren har ekspandert til sin likevektslengde (ved $x = 0.0$ m) er

- 0.40 J
- 2.0 J
- 0.020 J
- 0.80 J
- 16 J

Løsning: Fra bevaring av mekanisk energi (ser bort fra friksjon og luftmotstand), går all den potensielle energien til fjæren over til kinetisk energi til klossen. Vi får:

$$K_1 = \frac{1}{2}kx^2 = 0.40 \text{ J}.$$

Oppgave 15 **En kloss og en fjær (II)**



Vi har samme situasjon som i forrige oppgave: En fjær med fjærkonstant $k = 20$ N/m er festet til en vegg. En kloss med masse $m = 0.10$ kg trykkes inn i fjæren slik at den blir komprimert til $x = -20$ cm. Så slippes systemet løs. Farta klossen får når fjæren har ekspandert til sin likevektslengde (ved $x = 0.0$ m) er

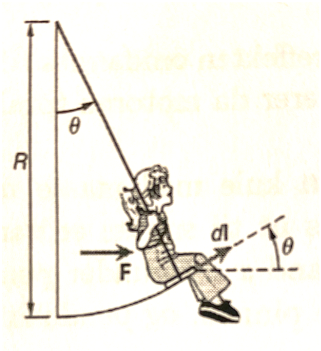
- 2.8 m/s

- 6.3 m/s
- 0.72 m/s
- 11 m/s
- 32 m/s

Løsning: Bevaring av mekanisk energi med startfart $v_0 = 0.0$ m/s:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}x = 2.8 \text{ m/s}.$$

Oppgave 16 Husketur



Et barn med masse m sitter på ei huske der lengden av tauet er R, se figur. Vi ser bort fra massen til huska. Du skyver så barnet med en horisontal kraft F slik at tauet danner en vinkel θ med vertikalen. Du skyver så langsomt at barnet og huska har tilnærmet null akselerasjon hele tiden. Kraften F som funksjon av vinkelen θ er gitt ved

- $F = mg\tan\theta$
- $F = mg\sin\theta$
- $F = mg\cos\theta$
- $F = \frac{m}{g}\tan\theta$
- $F = \frac{g}{m}\tan\theta$

Løsning: Her bruker vi Newtons 2. (eller 1.) lov og legger positiv x-retning mot høyre og positiv y-retning oppover. Kreftene som virker er tyngdekraft $\vec{G}$, snordrag $\vec{S}$ og skyvekraft $\vec{F}$. Siden det er ingen akselerasjon er systemet hele tiden i likevekt. N2L i y-retning gir:

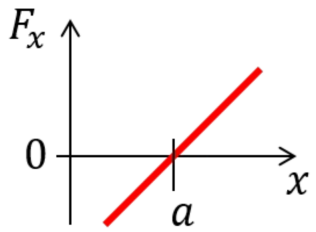
$$S\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow S = \frac{mg}{\cos\theta}$$

N2L i x-retning gir:

$$F - S\sin\theta = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = F = mg\tan\theta.$$

Så kraften du skyver med er $F = mg\tan\theta$.

Oppgave 17 En konservativ kraft

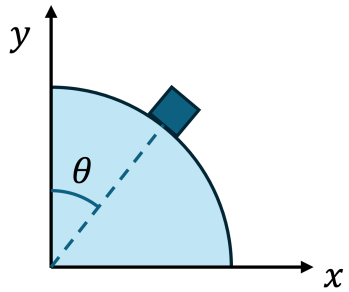


Figuren viser en konservativ kraft F_x som funksjon av x i nærheten av $x = a$, hvor a er en gitt posisjon. Hvilken påstand om den tilhørende potensielle energien $U(x)$ er riktig?

- $U(a) = 0$
- $U(x)$ er maksimal ved $x = a$
- $U(x)$ er verken maksimal eller minimal ved $x = a$, og $U(x) \neq 0$
- $U(x)$ er minimal ved $x = a$

Løsning: Vi har at kraften $-F(x) = \frac{dU}{dx}$, og siden $F(x = a)$ er null så er dette et ekstremalpunkt. Siden stigningstallet til kraften er positiv i $x = a$, får vi at $-\frac{dF}{dx} = \frac{d^2U}{dx^2}$ er negativ, dvs. $U(x)$ har en maksimalverdi ved $x = a$.

Oppgave 18 En kloss på en kuleflate (I)



En kloss sklir på en kuleflate med radius R, se figur. Klossen starter ved en vinkel $\theta_0 = 0.0°$ målt i forhold til vertikalen, den får så et lite puff slik at den får en liten startfart v_0, og sklir så langs kuleflaten til den når en kritisk vinkel θ_k der klossen forlater kuleflaten. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand. Differensialligningen som beskriver farta til klossen som funksjon av vinkelen θ er gitt ved (*Hint: vi kan skrive* $\frac{dv}{dt}$ *som* $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\omega$ der ω er vinkelfarta):

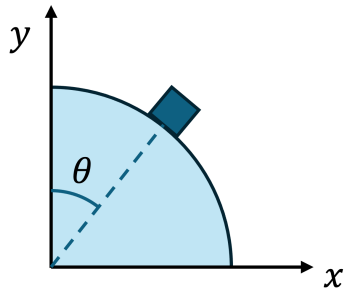
- $Rg\sin\theta = v\frac{dv}{d\theta}$
- $\frac{Rg}{\sin\theta} = v\frac{dv}{d\theta}$
- $Rg\cos\theta = v\frac{dv}{d\theta}$
- $\sin\theta = Rg\,v\frac{dv}{d\theta}$
- $Rg\tan\theta = \frac{1}{v}\frac{dv}{d\theta}$

Løsning: Vi bruker Newtons 2. lov. Kreftene på klossen er tyngdekraft med størrelse $G = mg$ og normalkraft N. Tangentielt har vi:

$$mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

og med $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\omega = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{R}$ får vi: $Rg\sin\theta = v\frac{dv}{d\theta}$.

Oppgave 19 En kloss på en kuleflate (II)



Vi har den samme situasjonen som i forrige oppgave: En kloss sklir på en kuleflate med radius R, se figur. Klossen starter ved en vinkel $\theta_0 = 0.0°$ målt i forhold til vertikalen, den får så et lite puff slik at den får en liten startfart v_0, og sklir så langs kuleflaten til den når en kritisk vinkel θ_k der klossen forlater kuleflaten. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand, og vi kan anta at startfarta v_0 er så liten at vi kan tilnærme den til å være null. Den kritiske vinkelen θ_k der klossen forlater kuleflaten er

- 48.2°
- 33.0°
- 45.0°
- 67.0°
- 81.7°

Løsning: Vi bruker diff-ligningen fra den forrige oppgaven:

$$Rg\sin\theta = v\frac{dv}{d\theta}$$

Separerer variablene og integrerer:

$$Rg\int_0^{\theta_k}\sin\theta d\theta = \int_0^v v'dv'$$

som gir

$$Rg(1-\cos\theta_k) = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v^2 = 2Rg(1-\cos\theta_k).$$

Newtons 2. lov normalt på kuleflaten gir

$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

og dersom klossen forlater kuleflaten ved den kritiske vinkelen θ_k er $N = 0$ og vi får:

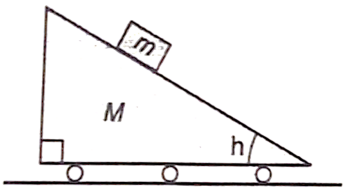
$$mg\cos\theta_k = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow Rg\cos\theta_k = v^2.$$

Nå bruker vi uttrykket vi allerede fant for v^2 og får:

$$Rg\cos\theta_k = 2Rg(1-\cos\theta_k) \Rightarrow \cos\theta_k = \frac{2}{3}$$

Dette gir $\theta_k = 48.2°$.

Oppgave 20 En kloss på ei rampe med hjul



En kloss med masse m kan skli nedover ei rampe som har påmontert hjul som vist i figuren. Vi ser bort fra luftmotstand. Helningsvinkelen på rampa er 45°, og den statiske friksjonskoeffisienten mellom klossen og skråplanet er $\mu_s = \frac{2}{5}$. For at klossen ikke skal skli nedover rampa, må rampa ha en akselerasjon mot høyre som er minst

- $\frac{3}{7}g$
- $\frac{2}{5}g$
- $\frac{1}{8}g$
- $\frac{5}{7}g$
- $2mg$

Løsning: Kreftene som virker på klossen er normalkraft N fra rampa, den statiske friksjonen f opp rampa, og tyngdekrafta G rett ned. Fra Newtons 2. lov i vertikal (y-)retning får vi (med krav om at det ikke skal være noen akselerasjon i vertikal retning):

$$N\cos\theta + f\sin\theta - mg = ma_y = 0$$

Så N2L i horisontal (x-) retning, som gir oss:

$$N\sin\theta - f\cos\theta = ma_x$$

Nå bruker vi den maksimale statiske friksjonen, $f_{s,max} = \mu_s N$, og får i y-retning:

$$N\cos\theta = mg - \mu_s N\sin\theta$$

$$N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}.$$

Så vet vi at $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$ og $\mu_s = 2/5$, og da får vi:

$$N = \frac{mg}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mu_s)} = \frac{\sqrt{2}mg}{7/5} = \frac{5\sqrt{2}}{7}mg.$$

Dette bruker vi nå inn i N2L i x-retning og får:

$$\frac{5\sqrt{2}}{7}mg\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{5}\frac{5\sqrt{2}}{7}mg\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{7}mg - \frac{2}{7}mg = \frac{3}{7}mg.$$

Akselerasjonen for klossen blir da $a_x = \frac{3}{7}g$, og det betyr at rampa må ha en tilsvarende akselerasjon i x-retning for at klossen skal bli liggende i ro på rampa.

Eksamenssett slutt.