

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Løsningsforslag (ACL & JB, 23.03.2022)

Midtveiseksamen FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022

Dato: Onsdag 23. mars 2022, kl 09:00-12:00 (3 timer)

Oppgavesettet er på: 20 flervalgsoppgaver.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator; Rottman: “Matematisk formelsamling”; Øgrim og Lian: “Størrelser og enheter i fysikk og teknikk”; Angell, Lian, Øgrim: “Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler”

Oppgave 1

Du kaster en ball i vertikal retning med en initialhastighet $\vec{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{j}}$. Ballen bruker en tid t for å komme til sitt høyeste punkt. Hvis du kaster med dobbelt så stor initialhastighet $2\vec{v}_0$, hvor lang tid tar det nå for ballen å komme til sitt høyeste punkt?

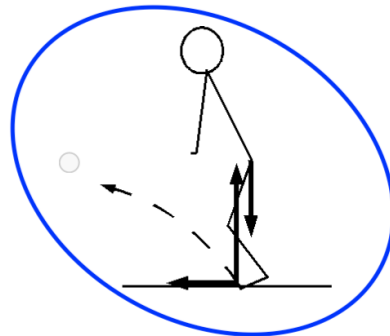
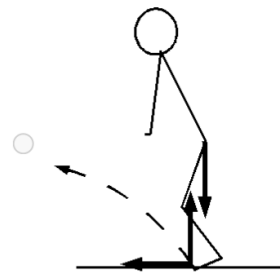
- $2t$
- $t\sqrt{2}$
- $\frac{t}{\sqrt{2}}$
- $\frac{1}{2}t$
- t

Denne oppgaven var en Mentimeter-oppgave fra forelesning 3, 25.01.2022. I det høyeste punktet i banen er hastigheten til ballen null. Initialhastigheten er kun i vertikal retning. Vi bruker bevegelsesligningen, med t som tiden der ballen når sitt høyeste punkt:

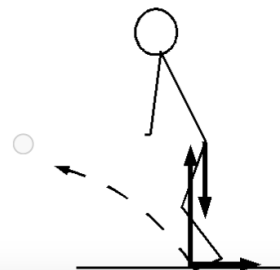
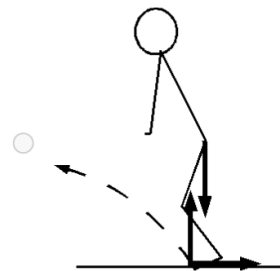
$$v = v_0 + \int_0^t a(t') dt' = v_0 - gt = 0$$
$$\Rightarrow v_0 = gt \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}.$$

Hvis vi nå kaster med $2v_0$ tar det dobbelt så lang tid for ballen å nå sitt høyeste punkt. Riktig svar: $2t$.

Oppgave 2



Du skal hoppe oppover og framover. Idet du satser, hvilken figur representerer best kreftene som virker på deg?

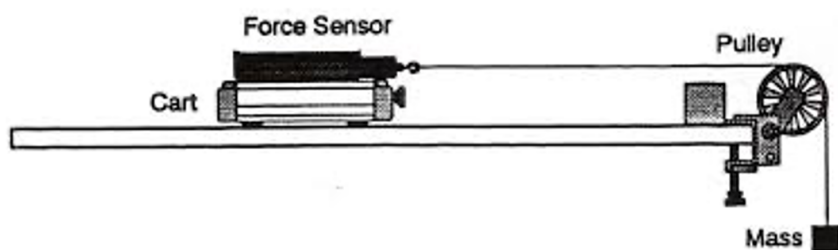


Kreftene som virker er tyngdekraft nedover, normalkraft fra bakken oppover, friksjon framover. For at du skal bevege deg opp og fram, må normalkraften være større enn tyngdekraften for å gi en akselerasjon oppover. Friksjonen gir en akselerasjon framover.

Oppgave 3

En vogn står på en friksjonsfri overflate. En kraftsensor på vognen er festet med en snor til en masse m som henger ned som vist i figuren. I starten holder du vognen. Når du slipper den, så vil snordraget (spenningen) i snoren

- minke
- øke
- være det samme



Vi ser på kreftene som virker på massen som henger i snoren. Når du holder i vognen, er både vognen og klossen i ro. Kraften du bruker på å holde vognen i ro er like stor men motsatt rettet av snordraget som sensoren måler. Vi bruker Newtons 2. lov i vertikal retning på klossen med masse m , med positiv y -retning oppover:

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$T - mg = 0 \Rightarrow T = mg.$$

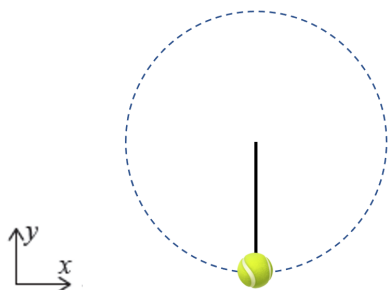
Når du slipper vognen, vil vognen bevege seg mot høyre (siden det ikke er noe friksjon som kunne holde den igjen) og klossen bevege seg nedover. Igjen bruker vi Newtons 2. lov på klossen:

$$F_y = ma_y = T - mg < 0.$$

Tyngdekraften er den samme som før, men snordraget blir mindre og klossen får en akselerasjon nedover. Riktig svar: snordraget minker.

Oppgave 4

Du svinger en tennisball i en snor så ballen beveger seg på en *vertikal* sirkelbane. I det nederste punktet på banen er snordraget:



- Like stor som tyngdekraften på ballen
- Større enn tyngdekraften på ballen
- Mindre enn tyngdekraften på ballen

For at tennisballen skal kunne fortsette på en sirkelbane, må vi ha en akselerasjon som endrer retning på hastighetsvektor, som alltid er tangentielt på banen. I det nederste punktet peker hastighetsvektor kun i horisontal retning. For å gi hastigheten en komponent i vertikal retning, må det være en sentripetalakselerasjon inn mot sentrum av sirkelen. Fra Newtons 2. lov i vertikal retning, når ballen er i det nederste punktet:

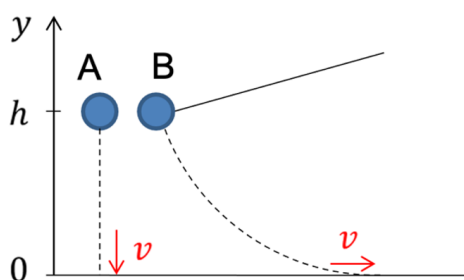
$$T - mg = ma > 0.$$

Riktig svar: snordraget må være større enn tyngdekraften på ballen.

Oppgave 5

En ball A med masse m faller fra en høyde h . En pendel B med samme masse m svinger fra samme høyde h . Vi ser bort fra luftmotstand. Hva er riktig om farten deres ved høyden $y = 0$ m?

- $|v_A| > |v_B|$
- $|v_A| < |v_B|$
- $|v_A| = |v_B|$



Her kan vi bruke bevaring av mekanisk energi. Både ballen og pendelen forflytter seg en høyde h i tyngdefeltet, og tyngdekraft er en konservativ kraft. Dermed er mekanisk energi bevart:

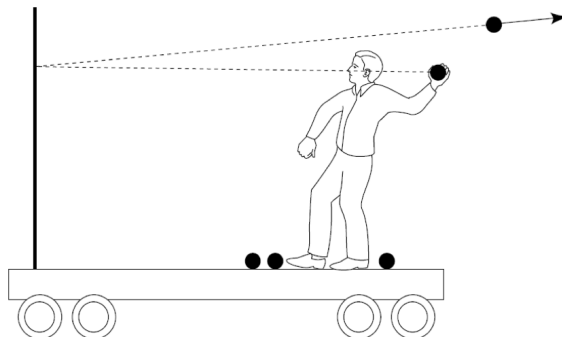
$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1.$$

De må ha samme fart v når de har falt fra den samme høyden h ned til den samme høyden $y = 0$ m.

Oppgave 6

Du står på en vogn som er i ro på et friksjonsfritt spor. Du kaster en ball i en vegg som er festet i vognen. Hvis ballen spretter tilbake som vist på figuren blir da vognen satt i bevegelse?

- Ja, den beveger seg mot venstre.
- Nei, den forblir i ro.
- Ja, den beveger seg mot høyre.

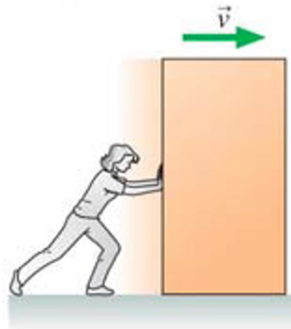


Vi ser på kreftene i horisontal retning. Vi kaller systemet bestående av vogna (med veggen) pluss personen på vogna for system A, og ballen er system B. For å vurdere om bevegelsesmengde er bevart eller ikke, må vi se om det er noen ytre krefter som virker i horisontal retning. Det er det ikke (om vi ser bort fra luftmotstand). Det er friksjon mellom føttene til personen og vogna, ellers ville personen skli mot høyre etter å ha kastet ballen mot venstre (jamfør Mentimeter med jenter på rulleskøyter). Men friksjonen vil være en indre kraft i system A. Dermed kan vi bruke at bevegelsesmengde er bevart i horisontal retning. Før personen kaster ballen er både system A og B i ro. Etterpå beveger ballen seg mot høyre, og da har ballen fått en bevegelsesmengde forskjellig fra null. Dermed må vi ha at bevegelsesmengden til system A må være like stor, men motsatt rettet. Riktig svar: system A (vogna, veggen, personen) må bevege seg mot venstre.

Oppgave 7

Du skyver en kiste med masse M over en horisontal flate med konstant fart v . Hvis du skyver den med dobbelt så stor fart, så er friksjonskraften:

- den samme
- dobbelt så stor
- fire ganger så stor
- halvparten så stor



Her er det dynamisk friksjon, siden kisten beveger seg langs gulvet. Uttrykket for dynamisk friksjon er:

$$|\vec{f}_d| = \mu_d |\vec{N}|,$$

altså ingen avhengighet av farten. Dermed har den dynamiske friksjonskraften samme størrelse uansett fart.

Oppgave 8

To baller, en med masse M og en med masse $2M$, slippes fra taket på fysikkbygningen. Vi ser bort fra luftmotstand. I forhold til ballen med masse M , så har ballen med masse $2M$ når den treffer bakken

- dobbelt så mye kinetisk energi
- halvparten så mye kinetisk energi
- den samme kinetiske energien
- fire ganger så mye kinetisk energi

Ballene blir kun påvirket av gravitasjon, som er en konservativ kraft. Vi kan derfor bruke bevaring av mekanisk energi:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1.$$

Ballene starter i ro, så $K_0 = 0$ for begge. Vi velger $U_1 = 0$ ved bakkenivå, og kaller høyden til fysikkbygget h . Da får vi, for ballen med masse M :

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_1^2,$$

som betyr at farten er gitt ved $v_1^2 = 2gh$, uavhengig av massen til ballen og dermed lik for begge ballene. For ballen med masse $2M$:

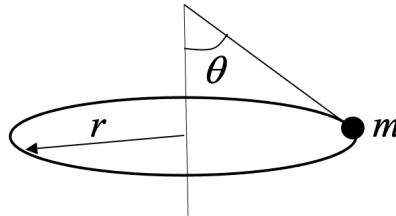
$$(2M)gh = \frac{1}{2}(2M)v_1^2.$$

Riktig svar: ballen med masse $2M$ har dobbelt så mye kinetisk energi som ballen med masse M .

Oppgave 9

Du har en tennisball med masse m som er festet i en snor. Du svinger den i en horisontal sirkel med radius r . Vi ser bort fra luftmotstanden. Hva er arbeidet utført på tennisballen i løpet av en svingeperiode (en runde rundt sirkelen)?

- $W = 0$
- $W = 2\pi r m g \cos \theta$
- $W = 2\pi r m g \sin \theta$
- $W = 2\pi r m \frac{v^2}{r}$
- $W = 2\pi r m g$



For at det skal gjøres et arbeid, må det være en kraft (eller kraftkomponent) som virker parallelt eller antiparallelt med hastighetsvektor:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt.$$

Vi ser på kreftene som virker på ballen. Tyngdekraften virker i vertikal retning. Siden ballen holder en sirkelbevegelse i det horisontale planet, står tyngdekraftsvektor alltid normalt på hastighetsvektor til ballen. Så har vi snordraget, som gjør at ballen kan holde sirkelbanen. Den vertikale komponenten kompenserer tyngdekraften slik at det ikke er noe bevegelse i vertikal retning. Denne komponenten står også normalt på hastighetsvektor og gjør ikke noe arbeid (prikkproduktet blir igjen null). Tilslutt har vi den horisontale komponenten av snordraget. Det er denne komponenten som gir en sentripetalakselerasjon, som gjør at ballen holder seg på sirkelbanen. Men også denne komponenten står normalt på hastighetsvektor. Dermed er det ingen krefter som gjør et arbeid på ballen. Riktig svar: $W = 0$.

Oppgave 10

Et legeme beveger seg horisontalt på en friksjonsfri overflate og kolliderer med et annet legeme som er i ro. Hvilken påstand er riktig?

- Bevegelsesmengde er alltid bevart, og mekanisk energi kan være bevart.
- Hverken bevegelsesmengde eller mekanisk energi er bevart.
- Bevegelsesmengde er alltid bevart, og mekanisk energi er aldri bevart.
- Mekanisk energi er alltid bevart, og bevegelsesmengde kan være bevart.
- Både bevegelsesmengde og mekanisk energi er alltid bevart.

I kollisjonen er det kun indre krefter som er av betydning i systemet bestående av de to legemene. Bevegelsesmengde er derfor alltid bevart. Vi vet ikke om kollisjonen er elastisk, uelastisk, eller fullstendig uelastisk. Derfor *kan* mekanisk energi være bevart, dersom kollisjonen er elastisk, men vil ikke være bevart i en (fullstendig) uelastisk kollisjon.

Oppgave 11

Du mister en brusflaske med masse m fra taket på en høy bygning. Nå tar vi hensyn til luftmotstand, som beskrives som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ hvor $\vec{v}$ er hastigheten til brusflasken. Bygningen er så høy at flasken vil oppnå terminalhastighet før den treffer bakken. Terminalfarten v_T til brusflasken er

- $v_T = \sqrt{\frac{mg}{D}}$
- $v_T = D\sqrt{mg}$
- $v_T = mgD$
- $v_T = \frac{mg}{D}$
- $v_T = \sqrt{\frac{mg}{D}}$

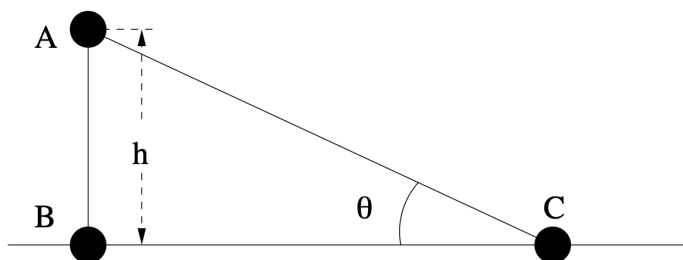
Vi finner terminalfarten når akselerasjonen er null, det vil si at luftmotstand og gravitasjon kompenserer hverandre. Newtons 2. lov i vertikal retning gir:

$$Dv_T^2 = mg \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{mg}{D}}.$$

Oppgave 12

En klinkekule med masse m slippes fra punkt A, og faller en høyde h før den lander på bakken i punkt B. Vi ser bort fra luftmotstand. Tiden klinkekulen bruker før den treffer bakken er t_{AB} . Vi lar nå kula skli langs et friksjonsfritt skråplan, fra samme punkt A ned til punkt C. Tiden kula bruker på å skli ned skråplanet er t_{AC} . Hvilken sammenheng mellom disse tidene er riktig?

- $t_{AC} = t_{AB} / \sin \theta$
- $t_{AC} = t_{AB} \cdot \sin \theta$
- $t_{AC} = t_{AB}$
- $t_{AC} < t_{AB}$



Vi har to tilfeller: ett hvor kula faller en høyde h og ett hvor den sklir ned skråplanet. Vi kan kalle lengden til skråplanet for L . I begge tilfeller starter klinkekula i ro, og det er kun tyngdekraften som gjør et arbeid på kula. Vi bruker punkt A som startpunkt (settes til null) for strekningen (både for høyden h og lengden L). Da får vi, fra bevegelsesligningene for konstant akselerasjon:

$$h = \frac{1}{2}a_{AB}t_{AB}^2,$$

$$L = \frac{1}{2}a_{AC}t_{AC}^2.$$

I tilfellet der kula faller høyden h , siden det ikke er luftmotstand, er akselerasjonen kun gitt ved tyngdeakselerasjonen, $a_{AB} = g$. I tilfellet der kula sklir ned skråplanet, er akselerasjonen gitt av den komponenten av tyngdekraften som peker ned langs skråplanet. Når kula sklir ned skråplanet har vi derfor, fra Newtons 2. lov:

$$mg \sin \theta = ma_{AC} \Rightarrow a_{AC} = g \sin \theta.$$

Nå bruker vi geometrien, nemlig at $h = L \sin \theta$ og akselerasjonene vi fant over og får:

$$L \sin \theta = \frac{1}{2}gt_{AB}^2,$$

$$L = \frac{1}{2}g \sin \theta t_{AC}^2.$$

Vi finner tilslutt:

$$\frac{1}{2}g \sin \theta t_{AC}^2 \sin \theta = \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \Rightarrow t_{AC}^2 = \frac{t_{AB}^2}{\sin^2 \theta} \Rightarrow t_{AC} = \frac{t_{AB}}{\sin \theta}.$$

Oppgave 13

En bil kjører over en bakketopp, som kan beskrives som en del av en sirkel med radius r . Inne i bilen ligger det en håndveske på setet. Ved hvilken fart vil håndvesken miste kontakten med setet?

- $v = \sqrt{gr}$
- $v = \sqrt{2gr}$
- $v = gr$
- $v = mgr$

Vi ser på summen av kreftene på veska akkurat på bakketoppen, vi har tyngdekraft $\vec{G}$ og normalkraft $\vec{N}$. Hvis vi definerer positiv y -retning oppover, får vi fra Newtons 2. lov:

$$\sum F_y = N - mg = -m\frac{v^2}{r},$$

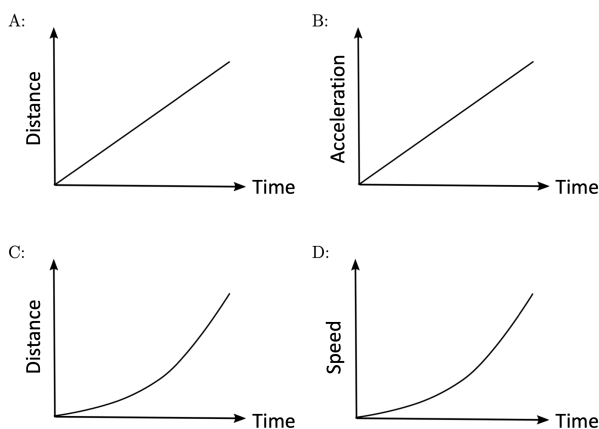
med sentripetalakselerasjonen som peker inn mot midten av sirkelen for å holde veska på sirkelbanen, og tyngdekraft i negativ y -retning. Hvis håndveska mister kontakt med setet, betyr det at normalkraften er null:

$$-mg = -m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{gr}.$$

Oppgave 14

Hvilken av grafene i figuren viser bevegelsen til et tog som kjører ut av stasjonen med konstant akselerasjon?

- C
- A
- B
- D

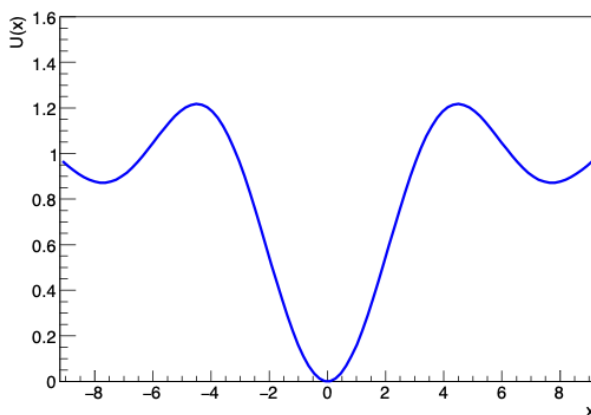


Siden akselerasjonen er konstant, kan det ikke være A, som ville vært riktig for null akselerasjon og konstant fart ($x(t) = v_0 t$). Graf B er også feil, her øker akselerasjonen lineært med tiden ($a(t) \propto t$), mens i teksten står det at den skal være konstant. I graf D går farten kvadratisk med tiden, og det stemmer ikke med konstant akselerasjon (da skulle farten gå lineært med tiden, $v(t) = v_0 + at$). Graf C er riktig, avstand går kvadratisk med tiden: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Oppgave 15

Vi har et potensial $U(x)$ som vist i figuren. Potensialet har

- tre stabile og to ustabile likevektspunkter
- to stabile og tre ustabile likevektspunkter
- ett ustabilt og to stabile likevektspunkter
- ingen likevektspunkter
- ett stabilt og to ustabile likevektspunkter



Vi finner likevektspunkter der den deriverte av potensialet er null:

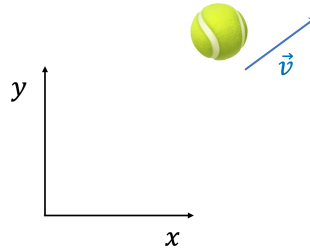
$$\frac{dU}{dx} = 0.$$

Likevektspunktet er stabilt dersom vi har et minimum i potensialet: $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$. Likevektspunktet er ustabilt dersom vi har et maksimum i potensialet: $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$. I grafen har vi tre minima, ved $x \approx -7.8$, $x = 0$, og $x \approx 7.8$. Så har vi to maksima, ved $x \approx -4.5$ og $x \approx 4.5$.

Oppgave 16

Du kaster en tennisball i et skrått kast. Luftmotstanden kan modelleres som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ og vi velger positiv y -retning oppover (vertikal retning). Hvilket av uttrykkene er riktig for y -komponenten av akselerasjonen til ballen?

- $a_y = -\frac{D}{m}v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$
- $a_y = -\frac{D}{m}v_y - g$
- $a_y = \frac{D}{m}v_y$
- $a_y = -\frac{D}{m}v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- $a_y = -\frac{m}{D}v_y^2$



Vi setter opp Newtons 2. lov for tennisballen for å finne akselerasjonen. Når den beveger seg i luften, blir den påvirket av gravitasjon og luftmotstand:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\hat{\mathbf{j}} = m\vec{a}.$$

Vi får for akselerasjonen:

$$\vec{a} = -\frac{D}{m}|\vec{v}|\vec{v} - g\hat{\mathbf{j}}.$$

Vi kan skrive $|\vec{v}|\vec{v}$ som

$$|\vec{v}|\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}).$$

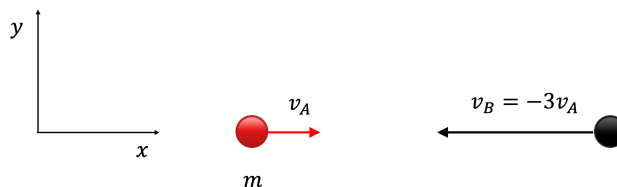
Vi bruker dette og prikker $\vec{a}$ med enhetsvektor $\hat{\mathbf{j}}$ for å finne y -komponenten:

$$a_y = \vec{a} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -\frac{D}{m} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) v_y - g.$$

Oppgave 17

To partikler er i bevegelse rett mot hverandre, partikkel A [tegnet] til venstre og partikkel B [tegnet] til høyre. Etter støtet er begge partiklene i ro. Partikkel A har masse m . Massen til partikkel B er:

- $m/3$
- m
- $3m$
- $\sqrt{3m}$
- $\frac{m}{\sqrt{3}}$



Her er det kun indre krefter, ingen ytre krefter spiller noen rolle og bevegelsesmengde er bevart. Etter kollisjonen er partiklene i ro, så bevegelsesmengden etter støtet er null.

Vi ser på den totale bevegelsesmengden før kollisjonen (kun bevegelse i x -retning) og setter lik null:

$$p_{A0} + p_{B0} = m_A v_{A0} + m_B v_{B0} = m_A v_{A0} - 3m_B v_{A0} = 0.$$

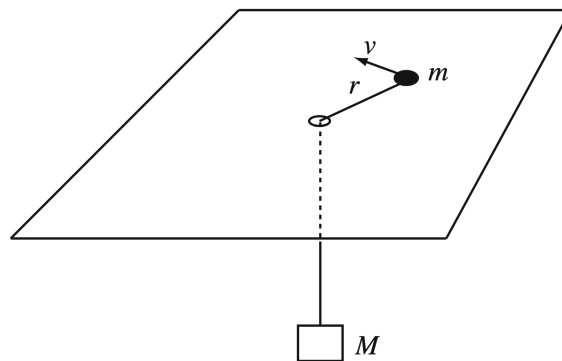
Vi løser mhp. m_B og får:

$$m_B = \frac{m_A v_{A0}}{3v_{A0}} = \frac{m}{3}.$$

Oppgave 18

En vekt med masse M henger i enden på ei masseløs snor. Snora går igjennom et lite hull på et flatt bord. Ei kule med masse m er plassert oppå bordet, og er festet til den andre enden av snora. Kula beveger seg på en sirkelbane med radius r på det friksjonsløse bordet. For en spesifikk fart v for kula, vil vekten bli på en konstant høyde. Denne farten er

- $v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$
- $v = \frac{Mgr}{m}$
- $v = \frac{r}{Mmg}$
- $v = \frac{mr^2}{Mg}$



Vi ser på betingelsen for at vekten skal være i ro. Kraftene som virker er tyngdekraften $\vec{G}$ og snordraget $\vec{T}$. Vi bruker Newtons 2. lov i vertikal retning for vekten:

$$T - G = 0 \Rightarrow T = Mg.$$

Videre må vi se på kreftene på kula. Kula beveger seg ikke i vertikal retning, kun på en sirkelbane i planet oppå bordet. For at kula skal holde seg på sirkelbanen må det være en sentripetalakselerasjon, og den skyldes nettopp snordraget:

$$T = m \frac{v^2}{r}.$$

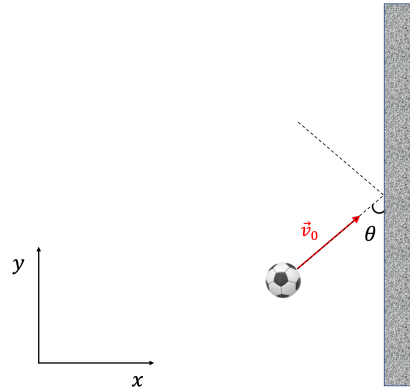
Vi setter disse uttrykkene lik hverandre og får:

$$Mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}.$$

Oppgave 19

En ball med masse m treffer en betongvegg. Ballen kommer mot vegg på skrå, slik at hastigheten til ballen danner en vinkel med vegg (se figur). Etter kollisjonen med vegg er farten til ballen den samme, men retningen på hastigheten har endret seg. Kun hastighetskomponenten i x -retning (normalt på vegg) forandres på grunn av kollisjonen. Ballen er i kontakt med vegg i et tidsintervall Δt . Størrelsen på den gjennomsnittlige kraften som virket i kollisjonen er

- $F = \frac{2mv_0 \sin \theta}{\Delta t}$
- $F = \frac{2mv_0}{\Delta t}$
- $F = \frac{2mv_0 \cos \theta}{\Delta t}$
- $F = \frac{mv_0}{\sin \theta \Delta t}$



Den gjennomsnittlige kraften er gitt som impuls per tidsintervall, $\vec{F}_{ave} = \vec{J}/\Delta t$. Det er kun i x -retning at bevegelsesmengden endres. Komponenten i x -retning før kollisjonen er $p_{0x} = p_0 \sin \theta$. Etter kollisjonen er $p_{1x} = -p_0 \sin \theta$. Impulsen i x -retning blir: $J_x = p_{1x} - p_{0x} = -2mv_0 \sin \theta$. Siden det spørres etter størrelsen (absoluttverdien) på kraften, får vi

$$|\vec{F}_{ave}| = \frac{|\vec{J}|}{\Delta t} = \frac{2mv_0 \sin \theta}{\Delta t}.$$

Oppgave 20 Motoren til en motorsykkel har en konstant effekt P . Motorsykkelen starter i ro og kjører på en rett vei. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand. Posisjonen til motorsykkelen er gitt ved

- $x(t) = \frac{2}{3} \sqrt{2Pt^3/m}$
- $x(t) = \sqrt{2Pt^3/m}$
- $x(t) = 2Pt^2$
- $x(t) = \sqrt{t^3/2Pm}$

Effekten P er gitt som $\vec{F} \cdot \vec{v}$, og vi har konstant effekt slik at arbeidet $W = Pt$. Motorsykkelen starter i ro, og vi får at

$$W = Pt = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}.$$

Så integrerer vi igjen for å finne posisjonen $x(t)$:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt'}{m}} dt'$$
$$x(t) = \sqrt{\frac{2P}{m}} \int_0^t (t')^{1/2} dt' = \sqrt{\frac{2P}{m}} \frac{2}{3} t^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2Pt^3}{m}}.$$

Eksamenssett slutt.