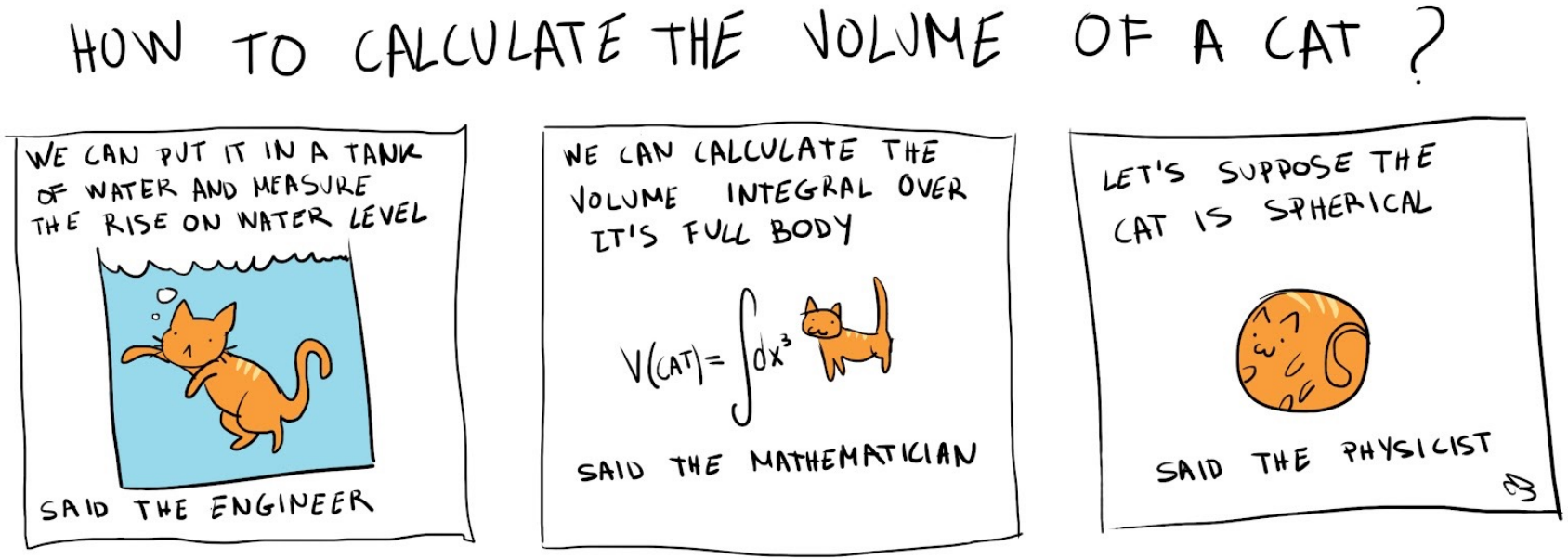
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 4: Differensialligninger og Newtons lover. Buet bevegelse, sirkelbevegelse.

(AMS kap. 4.2, 5.6.1; Kalkulusboka kap 10, spesielt 10.1, 10.4)

Læringsmål: Kunne løse ***1. ordens separable differensialligninger***. Bli vant med at Newtons 2. lov er en ***differensialligning. Analytisk løsning*** av noen differensialligninger. Buet bevegelse og sirkelbevegelse: ***sentripetalakselerasjon*** og ***baneakselerasjon***.

Beskjeder:

- ✓ Studentrepresentanter: Tuva Bjørnør Rosland og Mia Isabel Bernardo – tusen takk! 🤩
- ✓ Oblig 1: rettet ila torsdag 13. februar (Canvas)
- ✓ Oblig 2: legges ut fredag denne uka



Fra https://leenavijay.wordpress.com/2015/01/30/physics-jokes/

Mandag 10.02.2025

Litt om meg 😊





Fra Fredrikstad ☺️

Professor ved Fysisk institutt

Jobber med kjernefysikk og kjerne-astrofysikk ved Oslo Syklotronlaboratorium

Doktorgrad (UiO) 2008

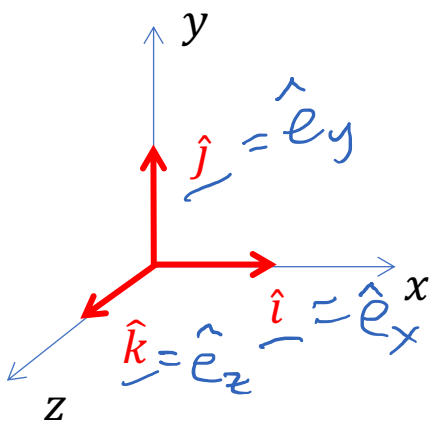
Forskeropphold ved Université Libre de Bruxelles (Belgia), UC Berkeley, Berkeley National Lab (California, USA), og Michigan State University (Michigan, USA)





Interesser: Star Wars, Dr. Who, Lego, lese bøker, finsk metal , ... , løping 🏃, ..., bytte dekk, ...

Repetisjon, bevegelse i 2D & 3D



Bevegelsen er karakterisert ved ***posisjon***, ***hastighet*** og ***akselerasjon***.

Posisjon: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Hastighet (fart): $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, v_y(t) = \frac{dy}{dt}, v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

(Størrelsen på) fart: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt}, \ldots$$

Skalar: størrelse, men ingen retning
Eksempel: masse, temperatur, lengde, fart, ...

Notasjon:

m, T, l, v

Vektor: størrelse *og* retning (sjekk ut «Grusomme meg» der Gru møter Vektor for første gang 😄)
Eksempel: posisjon, hastighet, akselerasjon, kraft, ... $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$

Bevegelsesligninger: helt analogt med 1D, men nå med ***vektorstørrelser***

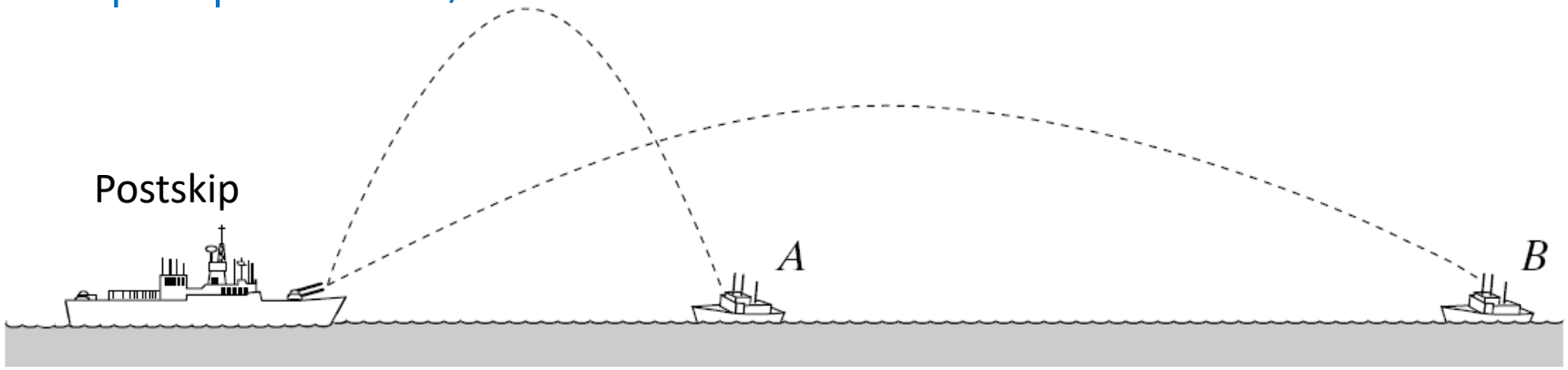
NB: akselerasjon kan endre både *fart* og *bevegelsesretning*

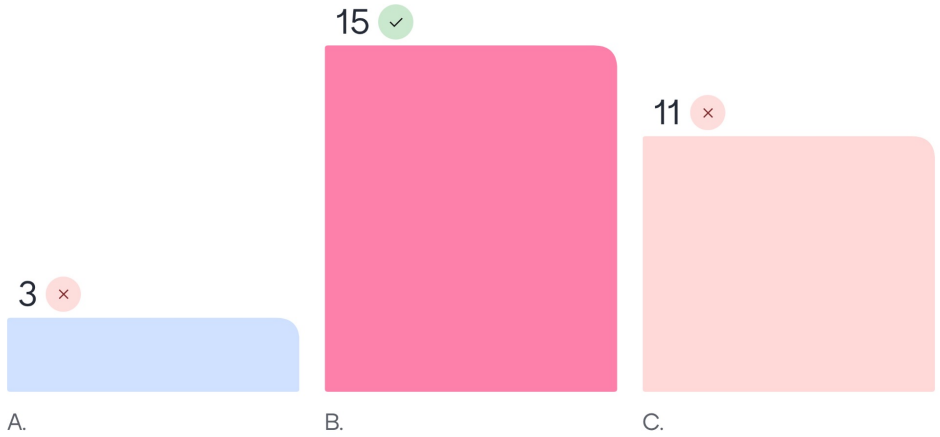
Mentimeter Postskip

www.menti.com kode 3709 7825

Et skip som leverer post, skyter samtidig to pakker til to fiskebåtene A og B. Initialfarten v_0 er den samme for begge pakkene, men vinklene i forhold til horisontalen er forskjellige. Pakkene følger parabolske baner. Hvilket skip får pakken sin først?

A. skip A
B. skip B
C. skipene blir truffet samtidig

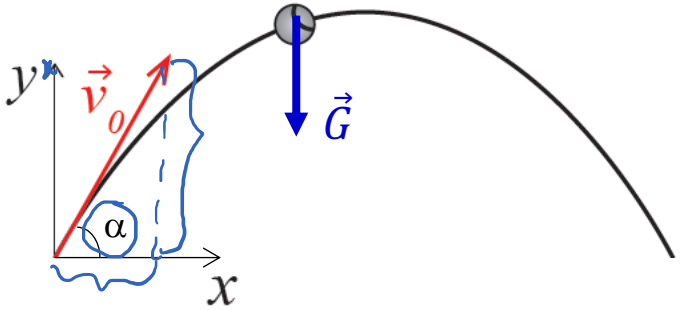




Eksempel: Pakke som skytes fra et postskip

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En pakke skytes ut fra bakkenivå med fart v_0 og vinkelen α. Hvilket skip får pakken først?



Initialbetingelser: $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\hat{i} + v_0\sin\alpha\,\hat{j}$$

Forenklet modell: uten luftmotstand

$$\text{N2L: } \vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{G} = -mg\hat{j} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -g\hat{j};\quad a_x = 0,\quad a_y = -g$$

Hastighet:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' = \vec{v}_0 - gt\hat{j}$$

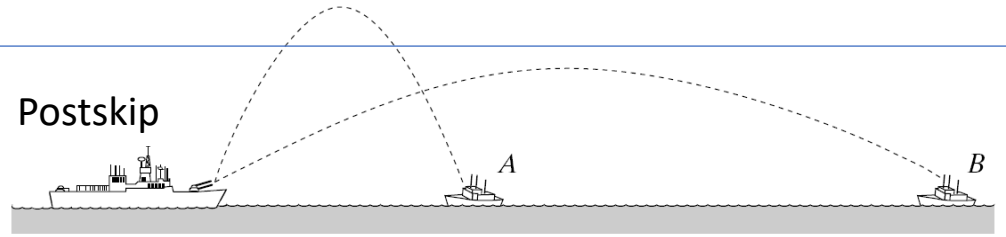
$$v_x(t) = v_0\cos\alpha = \text{konst.}$$

$$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt$$

Konstant hastighet v_x

v_x større for liten vinkel α

MEN: skip A ligger nærmere...



Eksempel: Pakke som skytes fra et postskip

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\hat{j}$

Initialbetingelse: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$

Posisjon: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt' = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$

På komponentform:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

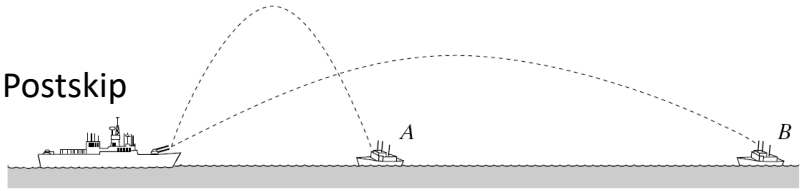
Skipet skyter ved tid $t_0 = 0$

Prosjektilet treffer ved tid t_1:

$$y(t_1) = 0\text{m} \Rightarrow v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0$$

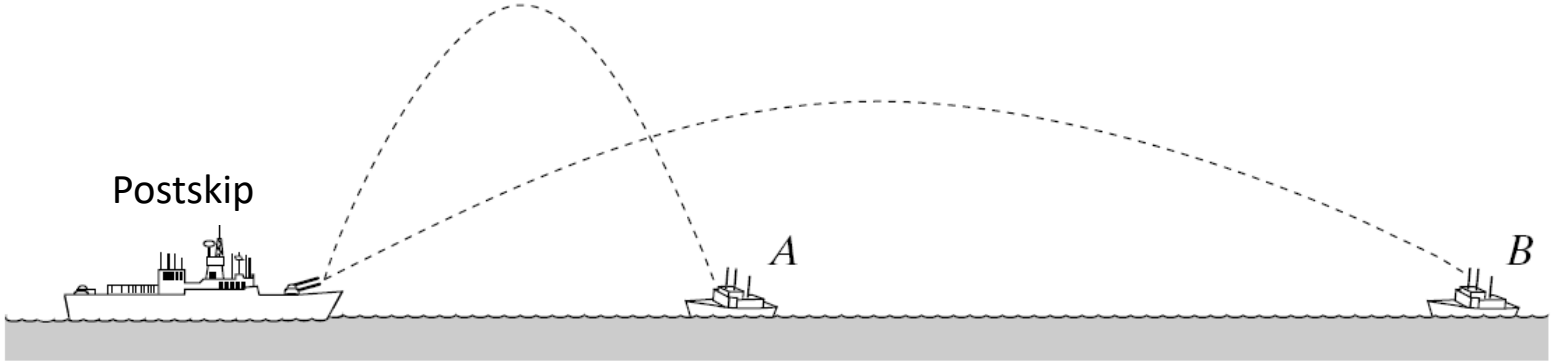
$$v_0 \sin\alpha = \frac{1}{2}gt_1$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$



Tiden t_1 er kortere for en liten vinkel α
$\Rightarrow$ skip B blir truffet først.

Eksempel: Pakke fra et postskip (oppsummert)



📝 Vi har brukt **oppskriften*** vår:

*Løsningsoppskrift, AMS, side 166, figur 6.11

1. finn initialbetingelser
2. identifiser krefter
3. løs bevegelsesligninger (integrasjon)
4. tolk bevegelsesligninger (algebra)

Trygg metode! ✅ sikker måte å finne svaret

Argumentasjon som trenger litt erfaring:

- bevegelsen i x- og y-retning er *koblet fra hverandre*:
  - konstant hastighet i x-retning, bevegelse med konstant akselerasjon i y-retning
- parabelbanen er symmetrisk: det tar like lang tid å komme opp som ned
- jo høyere den maksimale høyden er, jo lengre tid tar det å falle ned

Differensialligninger

I en vanlig ligning er den ukjente et tall: 3 – x = 1

I en differensialligning er den ukjente en funksjon.
Ligningen gir sammenhengen mellom den ukjente funksjonen og (noen av) dens deriverte.

Jeg legger ut et eget notat på diff-ligninger på Canvas ☺ Se også:
https://www.matematikk.net/side/Introduksjon_til_differensiallikninger

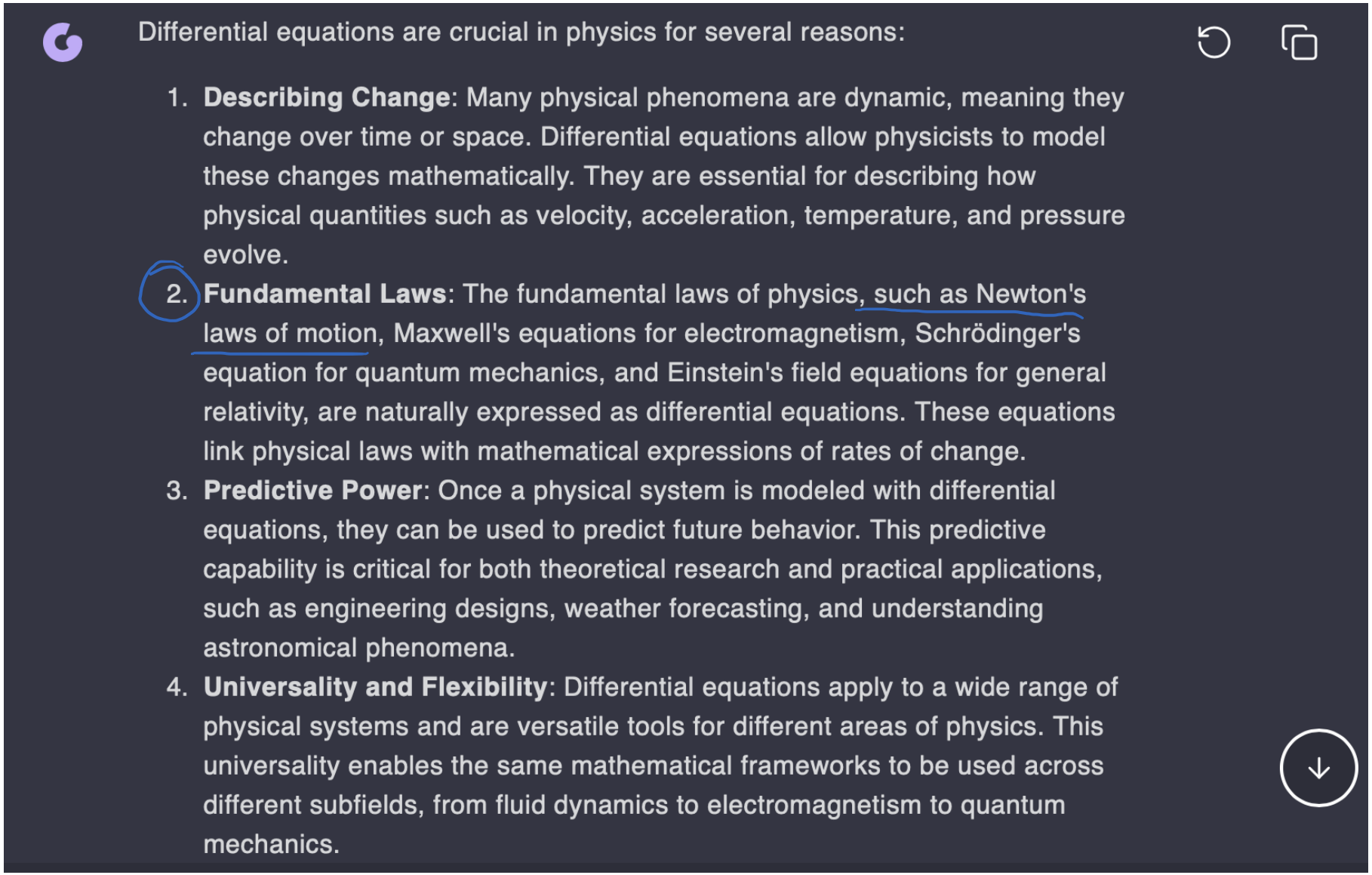

matematikk.net Forside Fag Matteprat Eksamensoppgaver

Introduksjon til differensiallikninger

Innhold [skjul]

1 Innledning
2 Ordenen til en diff.ligning
3 Førsteordens lineære ligninger
3.1 Homogene og inhomogene førsteordens diff.ligninger
3.2 Integrerende faktor
3.3 Separable differensiallikninger
4 Homogene lineære andreordens diff.ligninger med konstante koeffisienter
5 Initialverdiproblemer
6 Retningsdiagram

Fra UiO GPT



Differential equations are crucial in physics for several reasons:

1. **Describing Change**: Many physical phenomena are dynamic, meaning they change over time or space. Differential equations allow physicists to model these changes mathematically. They are essential for describing how physical quantities such as velocity, acceleration, temperature, and pressure evolve.
2. **Fundamental Laws**: The fundamental laws of physics, such as Newton's laws of motion, Maxwell's equations for electromagnetism, Schrödinger's equation for quantum mechanics, and Einstein's field equations for general relativity, are naturally expressed as differential equations. These equations link physical laws with mathematical expressions of rates of change.
3. **Predictive Power**: Once a physical system is modeled with differential equations, they can be used to predict future behavior. This predictive capability is critical for both theoretical research and practical applications, such as engineering designs, weather forecasting, and understanding astronomical phenomena.
4. **Universality and Flexibility**: Differential equations apply to a wide range of physical systems and are versatile tools for different areas of physics. This universality enables the same mathematical frameworks to be used across different subfields, from fluid dynamics to electromagnetism to quantum mechanics.

Formelarket og noen ekstra eksempler 👍

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$q(x) \cdot \frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter λ_1 og λ_2.

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2 t\, e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib : x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$

Noen typiske eksempler i boka:

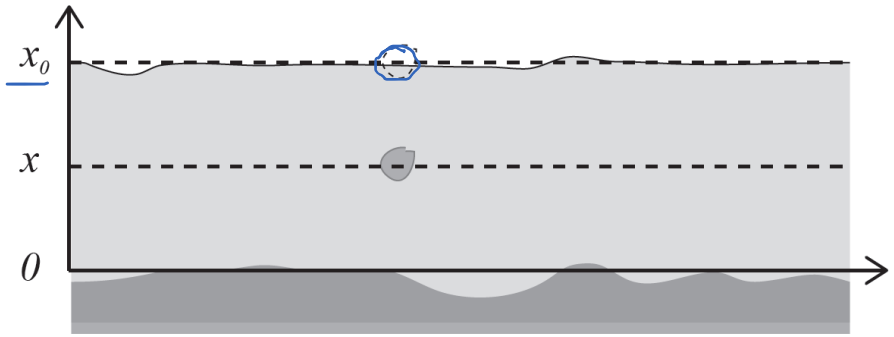
- Separabel 1.ordens lineær diff-ligning: vanndråpe som faller i lufta, AMS 5.6.1
- 2.ordens homogen diff-ligning: en kloss i en fjær som henger i taket, AMS 5.7.1

Vi skal snakke om 2.ordens diff-ligninger seinere i kurset ☺️

Fellesoppgave: sandkorn i vannet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Et sandkorn synker i vannet med akselerasjon: $a(t) = -a_0 - cv(t)$
hvor $a_0 = 6.2\ \text{m/s}^2$ og $c = 1.8\ \text{s}^{-1}$
Hvor lang tid tar det å synke fra overflaten til bunnen på 2.0 m dybde?



Initialbetingelser: $x(t_0 = 0s) = x_0 = 2.0m$
$v(t_0 = 0s) = v_0 = 0.0 m/s$
$t_0 = 0.0\ s$

Vi kjenner akselerasjonen: $a(t) = -a_0 - cv(t)$

Vi må løse differensialligningen: $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -a_0 - c\frac{dx}{dt}$, Posisjon

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -a_0 - cv$, Hastighet (fart)

Analytisk: sandkorn i vannet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Husk: $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$

Ønsker å finne $v(t)$

$$\frac{dv}{dt'} = -a_0 - cv(t') \Rightarrow dv = -(a_0 + cv)dt' \Rightarrow \frac{dv}{a_0 + cv} = -dt' \quad (i)$$

Substitusjon: $u = a_0 + cv \Rightarrow \frac{du}{dv} = c \Rightarrow dv = \frac{du}{c}$

Setter inn i (i): $\frac{du}{c}\frac{1}{u} = -dt' \Rightarrow \frac{du}{u} = -c\,dt'$

Integrerer: $\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = -c\int_0^t dt' \Rightarrow \ln[u(t)] - \ln[u(0)] = -ct$

$\ln\left[\frac{u(t)}{u(0)}\right] = -ct \Rightarrow \frac{u(t)}{u(0)} = e^{-ct} \Rightarrow u(t) = u(0)e^{-ct}$

Hva er $u(0)$?

$u(0) = a_0 + cv_0^{0} = a_0$

$\Rightarrow u(t) = a_0 e^{-ct}$

Tilbake til $v(t)$:

$u(t) = a_0 + c\,v(t) = a_0 e^{-ct}$

$v(t) = \frac{a_0}{c}e^{-ct} - \frac{a_0}{c} = \frac{a_0}{c}\left[e^{-ct} - 1\right]$

Grensetilfeller:

$t = 0\,s$: $v(t=0) = \frac{a_0}{c}[1-1] = 0 = v_0$ ☺

$t \to \infty$: $v(t\to\infty) = \frac{a_0}{c}[0-1] = -\frac{a_0}{c} = v_t$

Analytisk: sandkorn i vannet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Husk: $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

Posisjon som funksjon av tid

$$v(t) = -\frac{a_0}{c} + \frac{a_0}{c}e^{-ct} = v_T - v_T e^{-ct} = \frac{dx}{dt}$$

Integrer:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'}\,dt' = \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \left[v_T - v_T e^{-ct'}\right] dt' = v_T t - v_T \int_0^t e^{-ct'}\,dt'$$

$$x(t) - x(0) = v_T t - v_T\left[-\frac{1}{c}e^{-ct'}\right]_0^t = v_T t + \frac{v_T}{c}\left[e^{-ct} - 1\right]$$

Posisjonen:

$$x(t) = x(0) + v_T t + \frac{v_T}{c}\left[e^{-ct} - 1\right]$$

Sjekker $t=0$:

$$x(t=0) = x_0 + 0 + \frac{v_T}{c}\left[1 - 1\right] = x_0$$ ☺

Hva med $x(t_1) = 0$ m???

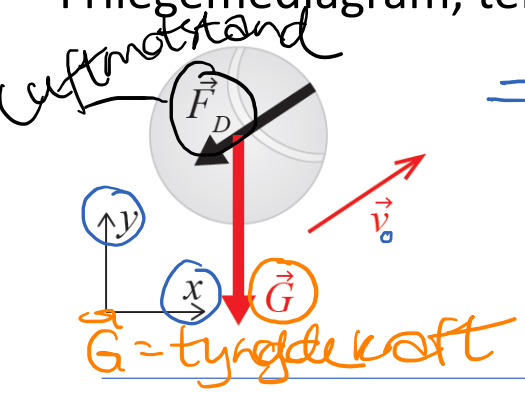
Vi har funnet en funksjon som beskriver posisjonen, men vi kan ikke løse ligningen $x(t) = 0$ analytisk. (Vi kunne gjøre det numerisk.)

Eksempel: skrått kast med luftmotstand

$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Frilegemediagram, tennisball:



$$\text{N2L}: \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_D + \vec{G} = -D|\vec{v}|\cdot\vec{v} - mg\hat{j} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{m} = -\frac{D}{m}|\vec{v}|\vec{v} - g\hat{j}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$|\vec{v}|\cdot\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,(v_x\hat{i} + v_y\hat{j})$$

Komponenter:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{D}{m}\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_x$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{D}{m}\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_y - g$$

Koblet bevegelse:

$$a_x = a_x(v_x, v_y)$$

$$a_y = a_y(v_x, v_y)$$

Vi kan *ikke* løse bevegelsesligningen for hver komponent separat!
Vi må løse bevegelsesligninger for x- og y-retning **samtidig!** 😱

Numerisk løsning 😎

Fri og betinget bevegelse



←Fri bevegelse:

Bevegelsen bestemmes av
kreftene og *initialbetingelsene*

Samme initialbetingelser
⇒ samme bevegelse på samme bane

Forskjellige initialbetingelser
⇒ forskjellige baner

Betinget bevegelse:→

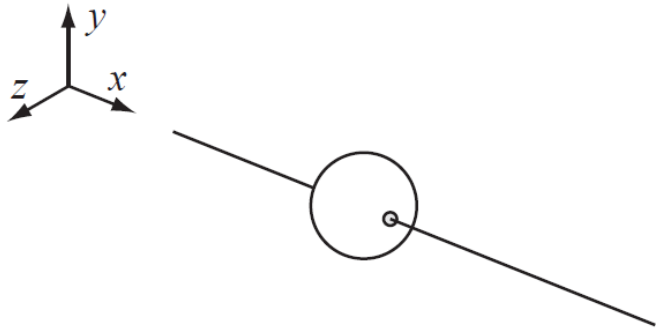
Banen er gitt

Kreftene og initialbetingelser bestemmer *hvordan* objektet beveger seg på denne banen



Lineær betinget bevegelse, eksempel: perle på en snor

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Perlen kan ikke bevege seg utenfor snoren.

Snoren gir en *betingelse* for bevegelsen til perlen
⇒ betinget bevegelse

Vi velger et koordinatsystem:

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\hat{i}$$

Perlen beveger seg langs *x*-aksen.

Posisjonen til legemet:
⇒ hvor langt har legemet kommet langs banen?
⇒ vi måler strekningen $s(t)$ langs banen

Her er det enkelt:

$$s(t) = x(t)$$

Hastighet:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} = \frac{ds}{dt}\hat{i}$$

Parametrisering av banen:

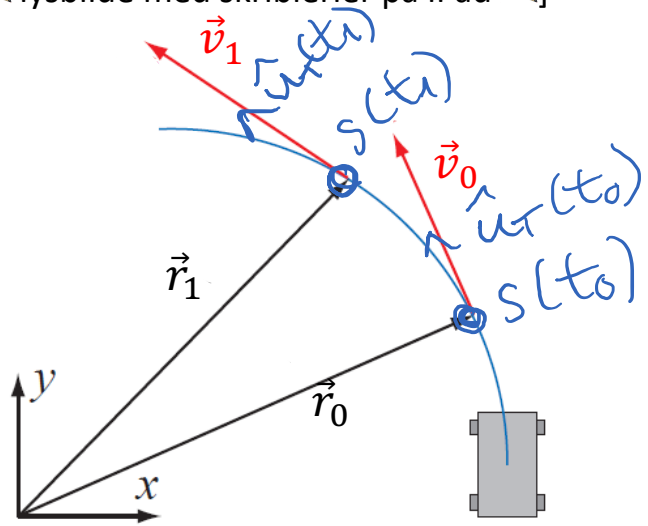
- *strekning* langs banen: $s(t)$
- *posisjonen* i rommet: banen $\vec{r}(s(t))$

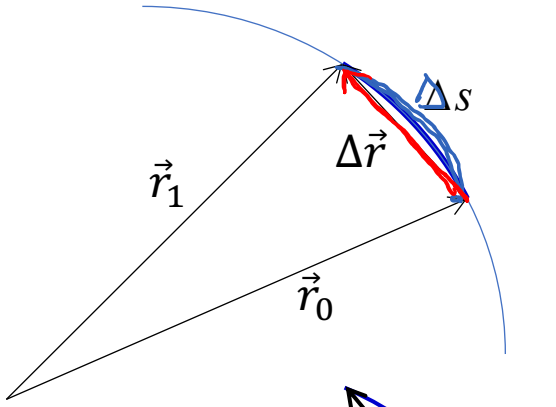
Fart:

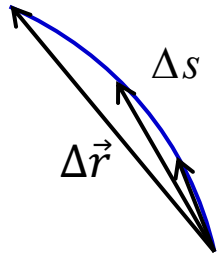
$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$$

Buet betinget bevegelse, eksempel: bil kjører en sving

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]







Posisjonsvektor: $\vec{r}(t)$ Kjørelengde (strekning) langs banen: $s(t)$

NB!

Vi parametriserer banen med kjørelengden: $\vec{r}(s(t))$

Hastigheten er tangentiell til banen: $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{u}_T(t)$

Tangentialvektor: $\hat{u}_T = \hat{u}_T(s(t))$

er avhengig av hvor på banen bilen er og dermed også *tidsavhengig*.

Vi kan måle farten langs banen: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$

For ***små intervaller*** $\Delta s, \Delta\vec{r}$: endring i kjørelengde Δs og forflytning $\Delta\vec{r}$ ≈ det samme:

$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$, $\Delta t \to 0$

Forflytningsvektoren peker i *tangentiell* retning for veldig små tidssteg intervaller Δt:

$\frac{d\vec{r}}{ds} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T(s(t))$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \hat{u}_T(s(t)) \cdot v(t)$

[Fortsetter i morra 🙂]

Takk for i dag! 😀