# FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
# Forelesning uke 4: Differensialligninger og Newtons lover. Buet bevegelse, sirkelbevegelse.

(AMS kap. 4.2, 5.6.1; Kalkulusboka kap 10, spesielt 10.1, 10.4)

**Læringsmål**: Kunne løse ***1. ordens separable differensialligninger***. Bli vant med at Newtons 2. lov er en ***differensialligning. Analytisk løsning*** av noen differensialligninger. Buet bevegelse og sirkelbevegelse: ***sentripetalakselerasjon*** og ***baneakselerasjon***.

**Beskjeder:**

✓ …

Mandag 10.02.2025

# Litt om meg 😊

Fra Fredrikstad ☺️

Professor ved Fysisk institutt

Jobber med kjernefysikk og kjerne-astrofysikk ved Oslo Syklotronlaboratorium

Doktorgrad (UiO) 2008

Forskeropphold ved Université Libre de Bruxelles (Belgia), UC Berkeley, Berkeley National Lab (California, USA), og Michigan State University (Michigan, USA)





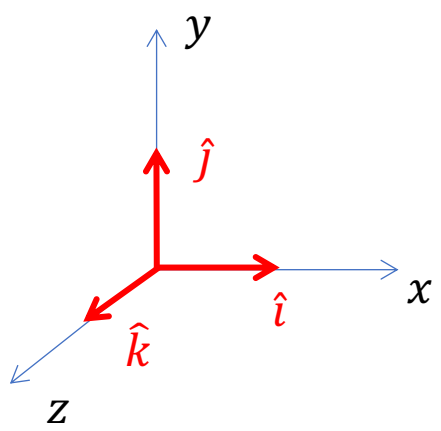






**Interesser**: Star Wars, Dr. Who, Lego, lese bøker, finsk metal , ... , løping 🏃‍♀️, ..., bytte dekk, ...

# Repetisjon, bevegelse i 2D & 3D




Bevegelsen er karakterisert ved ***posisjon***, ***hastighet*** og ***akselerasjon***.

**Posisjon**: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Hastighet (fart)**: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, v_y(t) = \frac{dy}{dt}, v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

**(Størrelsen på) fart**: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

**Akselerasjon**: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt}, \ldots$$

**Skalar**: størrelse, men ingen retning
Eksempel: masse, temperatur, lengde, fart, ...

Notasjon:

$m, T, l, v$

**Vektor**: størrelse *og* retning (sjekk ut «Grusomme meg» der Gru møter Vektor for første gang 😄)
Eksempel: posisjon, hastighet, akselerasjon, kraft, ... $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$

**Bevegelsesligninger**: helt analogt med 1D, men nå med ***vektorstørrelser***

***NB***: akselerasjon kan endre både *fart* og *bevegelsesretning*

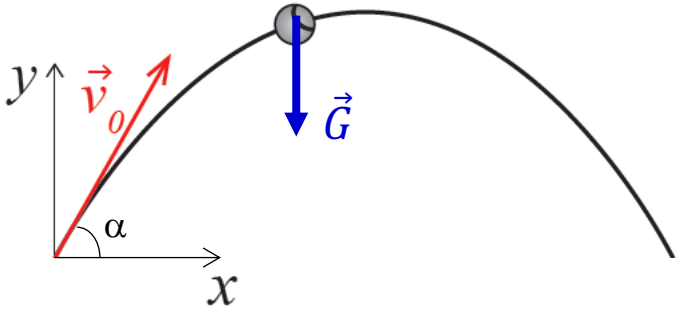
Mentimeter

www.menti.com kode XX

# Eksempel: Pakke som skytes fra et postskip

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En pakke skytes ut fra bakkenivå med fart $v_0$ og vinkelen $\alpha$. Hvilket skip får pakken først?




Initialbetingelser:

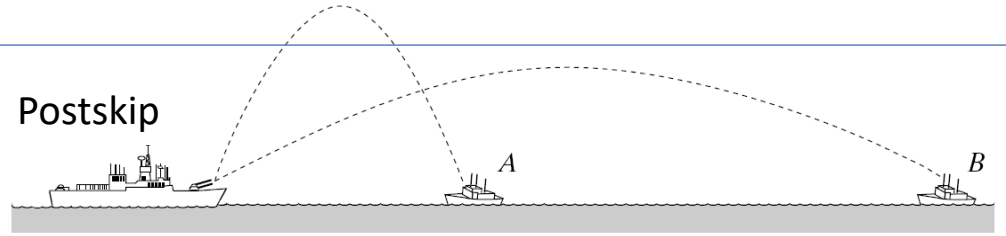
Forenklet modell:
uten luftmotstand

Hastighet:

Konstant hastighet $v_x$

$v_x$ større for liten vinkel $\alpha$

MEN: skip A ligger nærmere...



# Eksempel: Pakke som skytes fra et postskip

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\hat{j}$

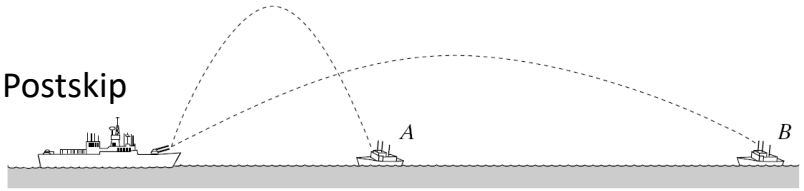
Initialbetingelse: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$

Posisjon:

På komponentform:

Skipet skyter ved tid $t_0 = 0$

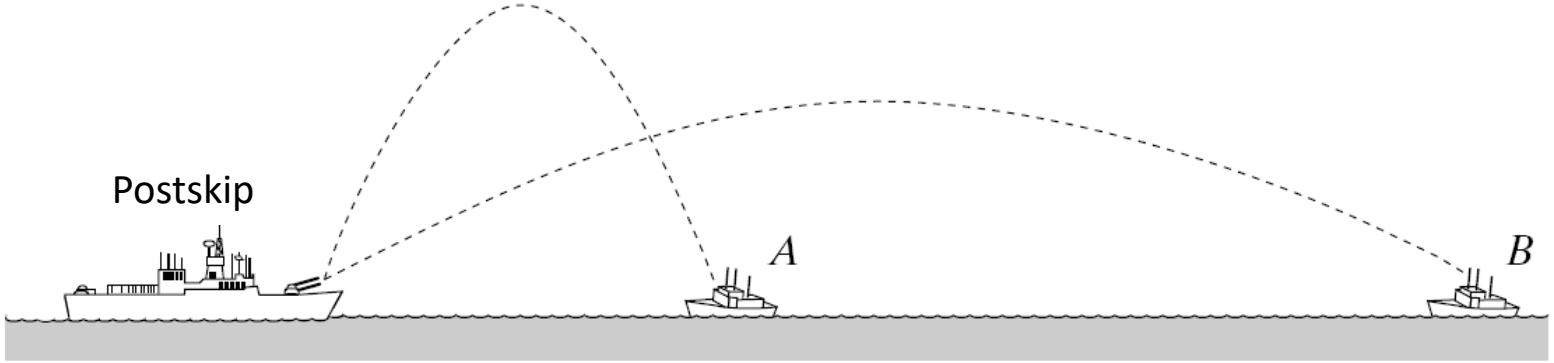
Prosjektilet treffer ved tid $t_1$:




Tiden $t_1$ er kortere for en liten vinkel $\alpha$

$\Rightarrow$ skip B blir truffet først.

# Eksempel: Pakke fra et postskip (oppsummert)




📝 Vi har brukt **oppskriften*** vår:

*Løsningsoppskrift, AMS, side 166, figur 6.11

1. finn initialbetingelser
2. identifiser krefter
3. løs bevegelsesligninger (integrasjon)
4. tolk bevegelsesligninger (algebra)

Trygg metode! ✅ sikker måte å finne svaret

Argumentasjon som trenger litt erfaring:

- bevegelsen i x- og y-retning er *koblet fra hverandre*:
  - konstant hastighet i x-retning, bevegelse med konstant akselerasjon i y-retning
- parabelbanen er symmetrisk: det tar like lang tid å komme opp som ned
- jo høyere den maksimale høyden er, jo lengre tid tar det å falle ned

# Differensialligninger

I en vanlig ligning er den ukjente et tall: 3 – x = 1

***I en differensialligning er den ukjente en funksjon.***
Ligningen gir sammenhengen mellom den ukjente funksjonen og (noen av) dens deriverte.

Jeg legger ut et eget notat på diff-ligninger på Canvas ☺️ Se også:
https://www.matematikk.net/side/Introduksjon_til_differensiallikninger



# Fra UiO GPT

Differential equations are crucial in physics for several reasons:

1. **Describing Change**: Many physical phenomena are dynamic, meaning they change over time or space. Differential equations allow physicists to model these changes mathematically. They are essential for describing how physical quantities such as velocity, acceleration, temperature, and pressure evolve.
2. **Fundamental Laws**: The fundamental laws of physics, such as Newton's laws of motion, Maxwell's equations for electromagnetism, Schrödinger's equation for quantum mechanics, and Einstein's field equations for general relativity, are naturally expressed as differential equations. These equations link physical laws with mathematical expressions of rates of change.
3. **Predictive Power**: Once a physical system is modeled with differential equations, they can be used to predict future behavior. This predictive capability is critical for both theoretical research and practical applications, such as engineering designs, weather forecasting, and understanding astronomical phenomena.
4. **Universality and Flexibility**: Differential equations apply to a wide range of physical systems and are versatile tools for different areas of physics. This universality enables the same mathematical frameworks to be used across different subfields, from fluid dynamics to electromagnetism to quantum mechanics.

# Formelarket og noen ekstra eksempler 👍

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$q(x) \cdot \frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter $\lambda_1$ og $\lambda_2$.

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2 t\, e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib : x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$

**Noen typiske eksempler i boka:**

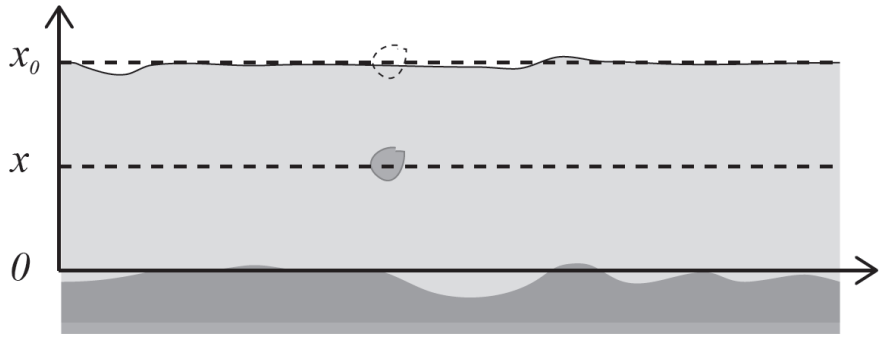
- Separabel 1.ordens lineær diff-ligning: vanndråpe som faller i lufta, AMS 5.6.1
- 2.ordens homogen diff-ligning: en kloss i en fjær som henger i taket, AMS 5.7.1

Vi skal snakke om 2.ordens diff-ligninger seinere i kurset ☺️

# Fellesoppgave: sandkorn i vannet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Et sandkorn synker i vannet med akselerasjon: $a(t) = -a_0 - cv(t)$
hvor $a_0 = 6.2\ \text{m/s}^2$ og $c = 1.8\ \text{s}^{-1}$
Hvor lang tid tar det å synke fra overflaten til bunnen på 2.0 m dybde?




Initialbetingelser:

Vi kjenner akselerasjonen:

Vi må løse differensialligningen:

# Analytisk: sandkorn i vannet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

# Analytisk: sandkorn i vannet

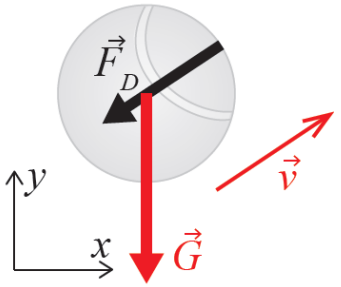
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi har funnet en funksjon som beskriver posisjonen, men vi kan ikke løse ligningen $x(t) = 0$ analytisk. (Vi kunne gjøre det numerisk.)

# Eksempel: skrått kast med luftmotstand

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Frilegemediagram, tennisball:




Komponenter:

***Koblet bevegelse:***

$$a_x = a_x(v_x, v_y)$$

$$a_y = a_y(v_x, v_y)$$

Vi kan *ikke* løse bevegelseslikningen for hver komponent separat!
Vi må løse bevegelsesligninger for x- og y-retning **samtidig!** 😱

Numerisk løsning 😎

# Fri og betinget bevegelse




←Fri bevegelse:

Bevegelsen bestemmes av
*kreftene* og *initialbetingelsene*

Samme initialbetingelser
⇒ samme bevegelse på samme bane

Forskjellige initialbetingelser
⇒ forskjellige baner

Betinget bevegelse:→

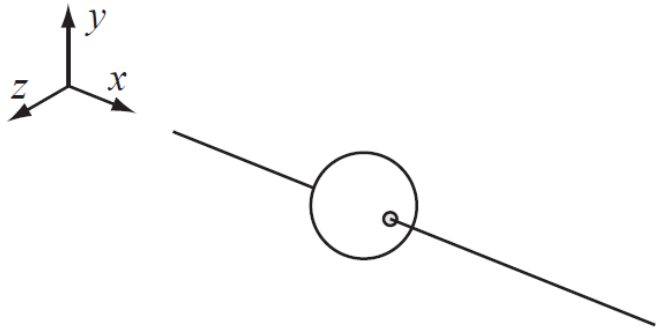
Banen er gitt

Kreftene og initialbetingelser bestemmer *hvordan* objektet beveger seg på denne banen



# Lineær betinget bevegelse, eksempel: perle på en snor

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




Perlen kan ikke bevege seg utenfor snoren.

Snoren gir en *betingelse* for bevegelsen til perlen
⇒ betinget bevegelse

Vi velger et koordinatsystem:

Perlen beveger seg langs *x*-aksen.

Posisjonen til legemet:
⇒ hvor langt har legemet kommet langs banen?
⇒ vi måler strekningen $s(t)$ langs banen

Her er det enkelt:

Hastighet:

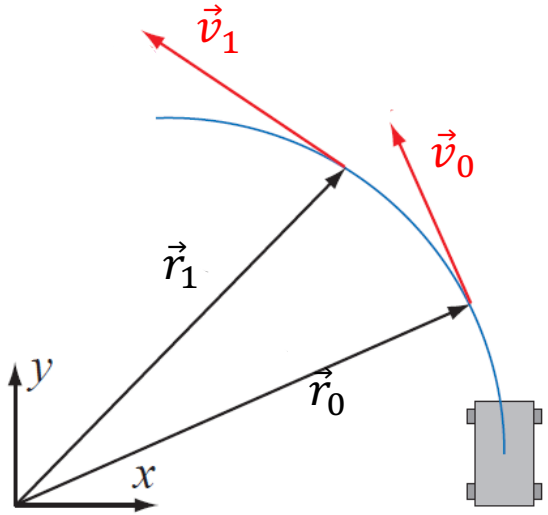
Parametrisering av banen:

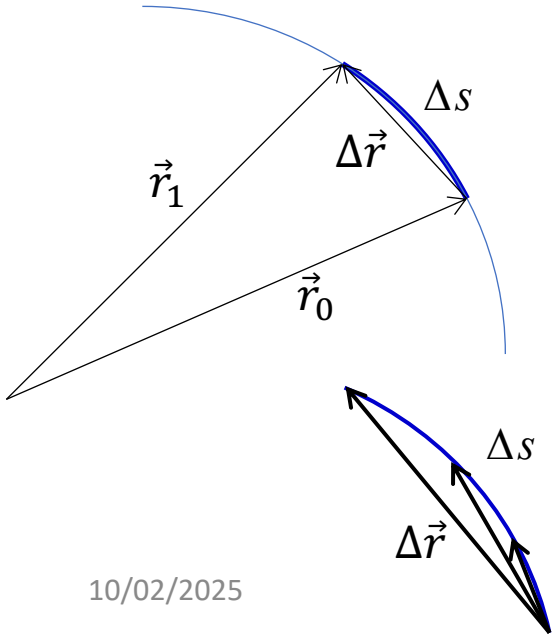
- *strekning* langs banen: $s(t)$
- *posisjonen* i rommet: banen $\vec{r}(s(t))$

Fart:

# Buet betinget bevegelse, eksempel: bil kjører en sving 🚙

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




Posisjonsvektor: $\vec{r}(t)$ Kjørelengde (strekning) langs banen: $s(t)$

Vi parametriserer banen med kjørelengden: $\vec{r}(s(t))$

Hastigheten er tangentiell til banen:

Tangentialvektor:

er avhengig av hvor på banen bilen er og dermed også *tidsavhengig*.

Vi kan måle farten langs banen:

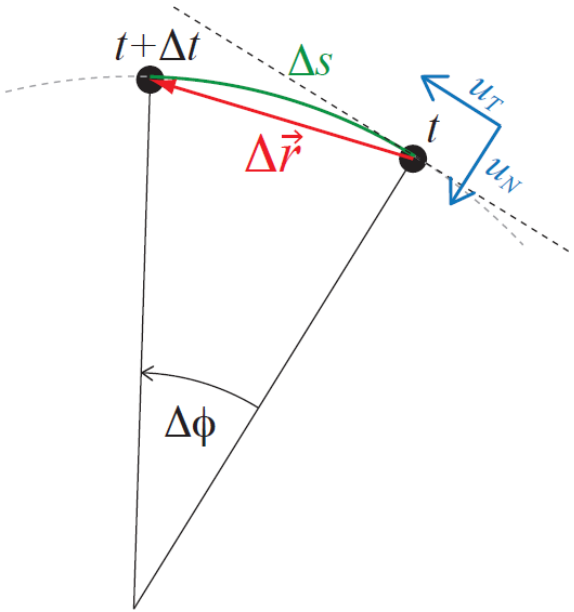
For ***små intervaller*** $\Delta s, \Delta\vec{r}$: endring i kjørelengde $\Delta s$ og forflytning $\Delta\vec{r}$ ≈ det samme:

Forflytningsvektoren peker i *tangentiell* retning for veldig små tidssteg $\Delta t$:

# Buet betinget bevegelse 🚙

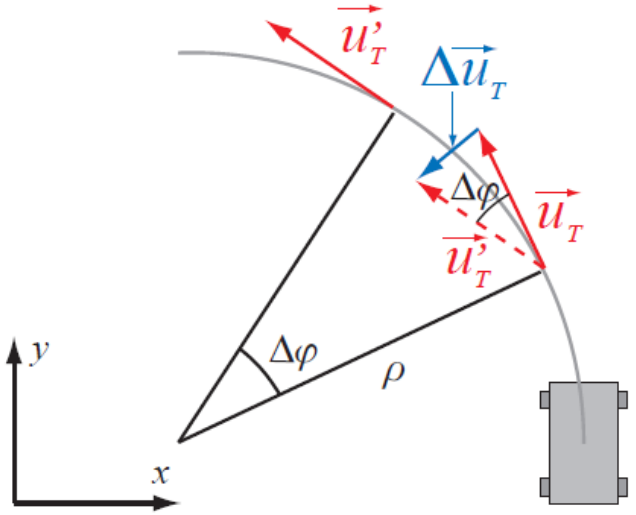
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$




***Lokale* koordinater**:

koordinatsystem av tangentiell vektor $\hat{u}_T$ og normal vektor $\hat{u}_N$ som følger med objektet langs banen




***Tangentialkomponent*** av akselerasjonen:

- forandring av *farten langs banen* (størrelsen til hastigheten)

***tangentialakselerasjon***

***Normalkomponent*** av akselerasjonen:

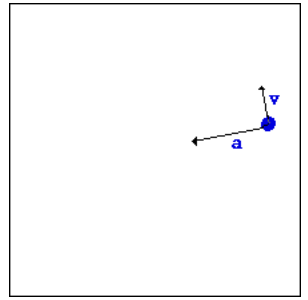
- forandring av *bevegelsesretningen*
- akselerasjon som trengs for å bli på banen

***sentripetalakselerasjon***

# Eksempel: konstant fart langs en sirkelbane (1)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

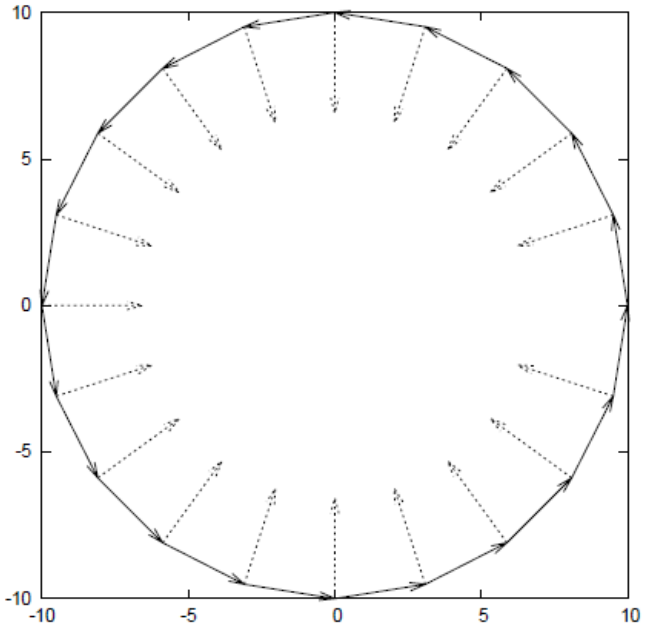
Et legeme beveger seg med konstant fart på en sirkelbane med radius R.




Tangentialakselerasjon:

Legemet beveger seg med ***konstant fart*** og
har ingen akselerasjon *langs sirkelbanen*.

Sentripetalakselerasjon:



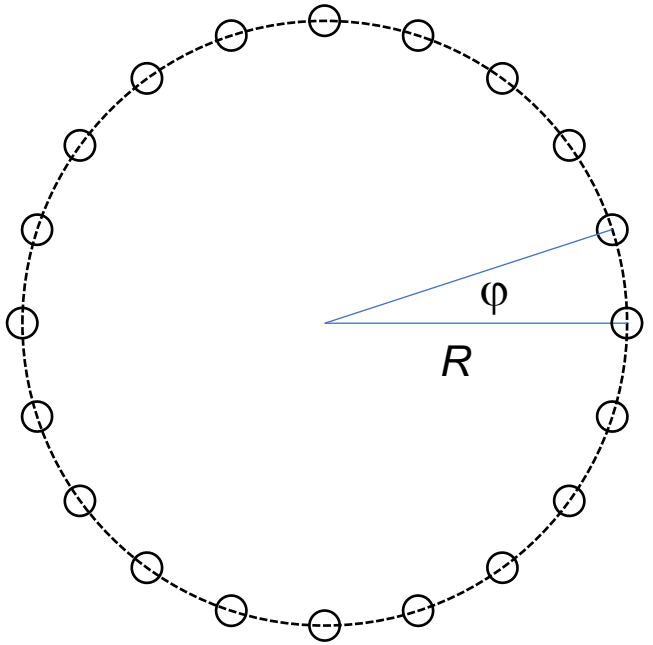

Sentripetalakselerasjonen har ***konstant størrelse*** (fordi farten er konstant) og peker inn mot sirkelens sentrum.

# Eksempel: konstant fart langs en sirkelbane (2)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Et legeme beveger seg på en sirkelbane med radius $R$ med konstant fart $v$.
Det tar en tid $T$ for et helt omløp.

Farten er konstant:




***Vinkelfart $\omega$***, enhet rad/s

Her er vinkelfart konstant:



Konstant fart ⟹ ingen tangential(bane-)akselerasjon ***Sentripetalakselerasjon*** 👍

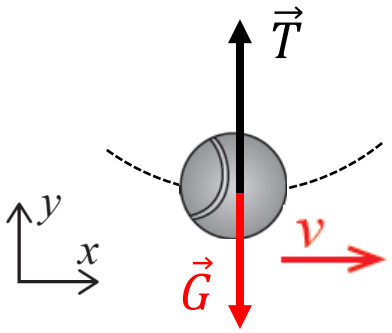
Mentimeter

www.menti.com kode XX

Mentimeter

www.menti.com kode XX

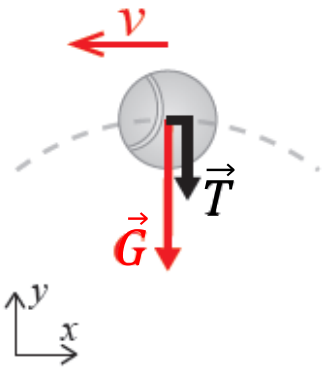
# Tennisball i en snor




Snordraget $\vec{T}$,
kraft fra snoren på ballen

Gravitasjon $\vec{G}$:

(Vi ser bort fra luftmotstand.)




N2L i y-retning:

Sentripetalakselerasjon
mot sirkelens sentrum:

Snoren kan bare dra, ikke dytte: $T > 0$

*Minimalfart* for å holde snordraget positivt!

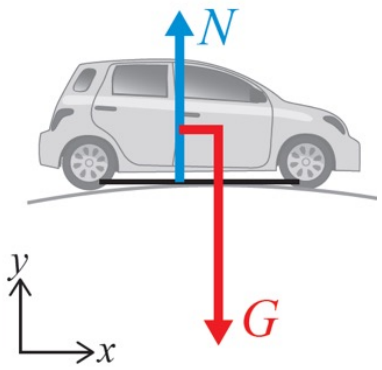
Snordraget er ***større*** enn tyngden til ballen.

Mentimeter

www.menti.com kode XX

# Eksempel: En bil kjører over en bakketopp 🚗

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




*Vertikale* krefter:

- normalkraft fra bakken: $\vec{N} = N\hat{j}$
- gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{j}$

Vi neglisjerer luftmotstand og friksjonskrefter 😜

N2L i *y*-retning:

---

*Betingelse*: Bil i kontakt med bakken:

Sentripetalakselerasjon (peker inn mot sentrum i sirkelen)

---

# Takk for i dag! 😀