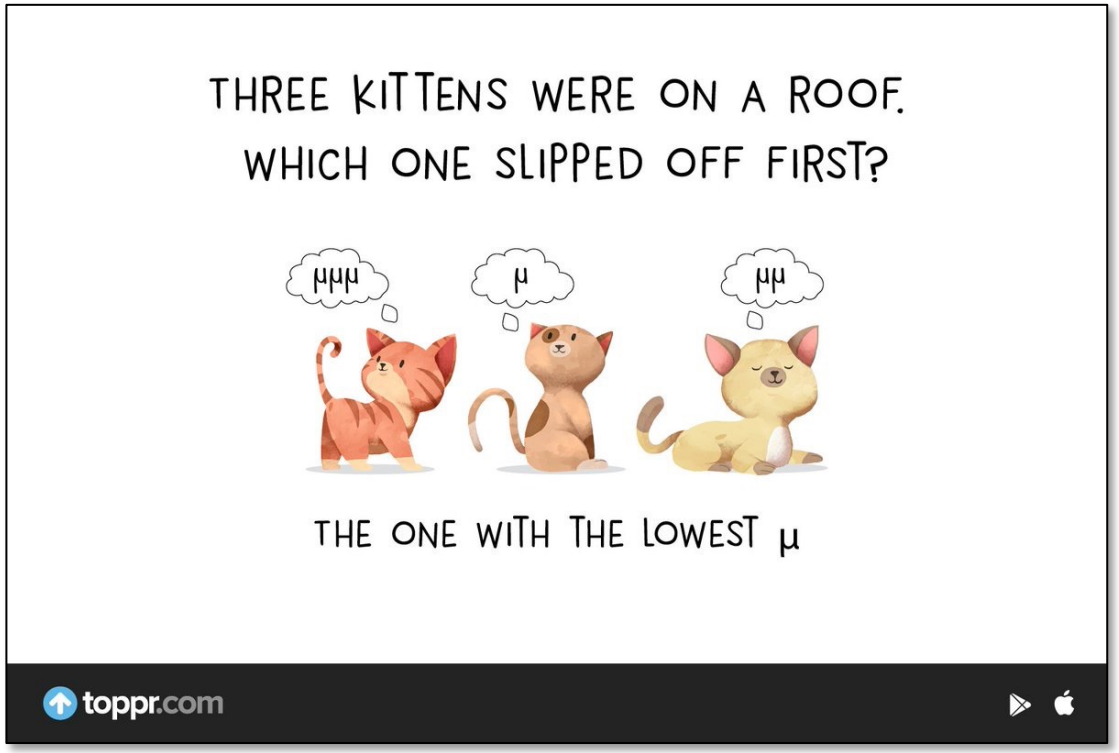
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 5: Friksjon. Arbeid og kinetisk energi, arbeid-energi-teoremet.

(AMS kap. 9, 10.1, 10.2)

Læringsmål: Vite hva statisk og dynamisk ***friksjon*** er, modeller for friksjonskraft. Vite hva arbeid og kinetisk energi er, vite hva ***arbeid-energi-teoremet*** er og hvordan det brukes.

Beskjeder:

- ✓ Seminar i morgen og til ukas gruppetimer: ta med laptop, vi skal programmere ☺️💻
- ✓ Oblig 2 lagt ut på fredag, frist 28. februar
- ✓ Opptak av tidligere forelesninger (vår 2024): legger ut lenke i Canvas



Mandag 17.02.2025

Repetisjon fra forrige uke 😄

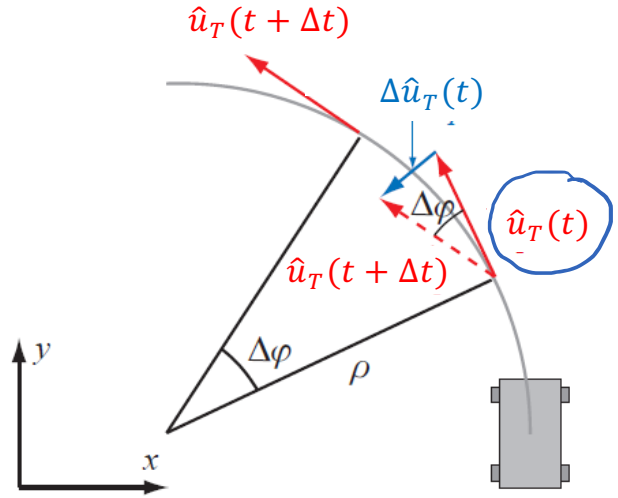
Betinget bevegelse: banen er fastlagt

Posisjonsvektor: $\vec{r}(t)$

Strekning langs banen: $s(t)$

Parameterisering av banen med strekningen: $\vec{r}(s(t))$





Hastighet: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t)\hat{u}_T$

Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$

Tangentialvektor: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{u}_T(s(t))$

Tangentialakselerasjon: $a_T = \frac{dv}{dt}$ — forandring av farten *langs* banen

Fart langs banen: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$

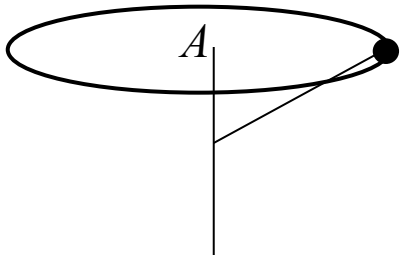
Sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ — forandring av *bevegelsesretning*

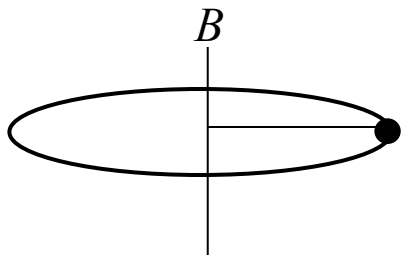
Mentimeter Jojo på en snurr

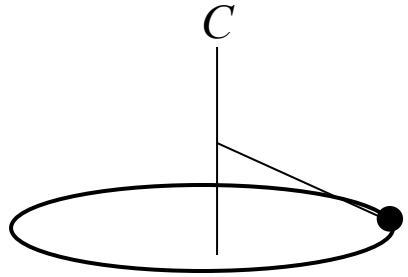
www.menti.com kode 6374 2579

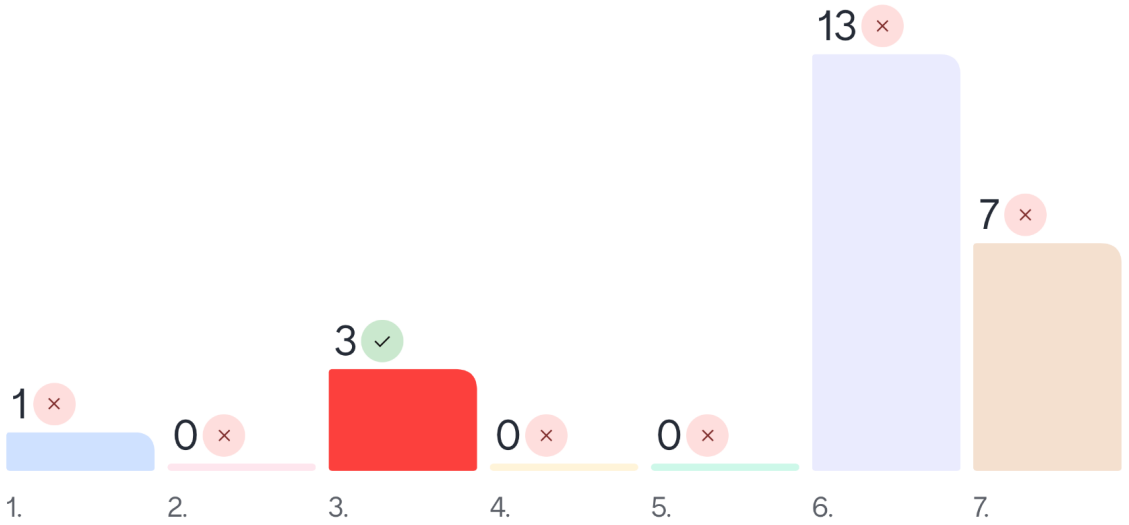
Jeg snurrer en jo-jo i et horisontalt plan om hånden min. Hvilke av følgende baner er mulige:

1. Bane A
2. Bane B
3. Bane C
4. Bane A og B
5. Bane A og C
6. Bane B og C
7. Alle tre



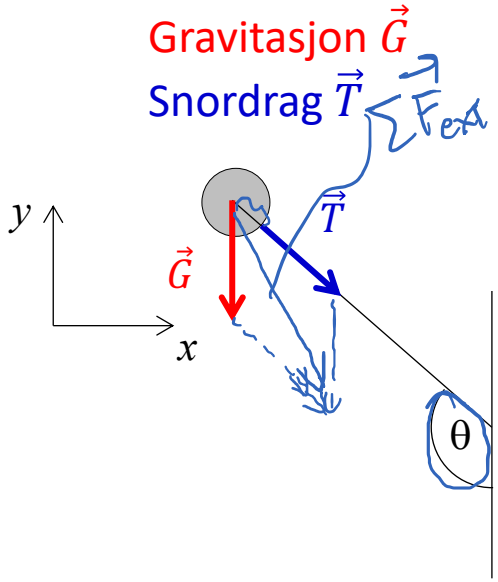






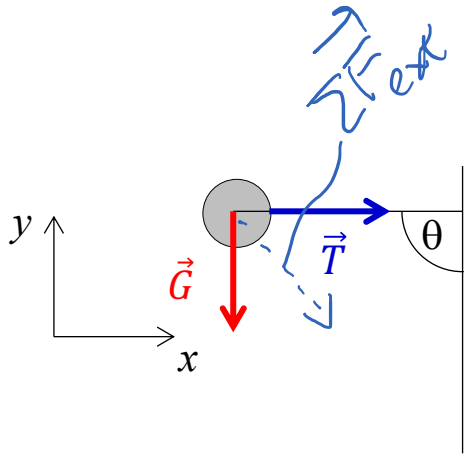
Jojoen: hva skjer? 🤔

A: θ > 90°



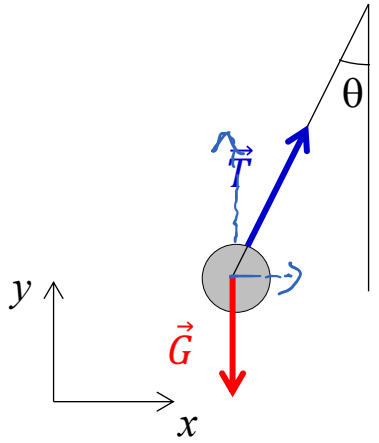
Nettokraft nedover
⇒ horisontal bane
ikke mulig

B: θ = 90°



Nettokraft nedover
⇒ horisontal bane
ikke mulig

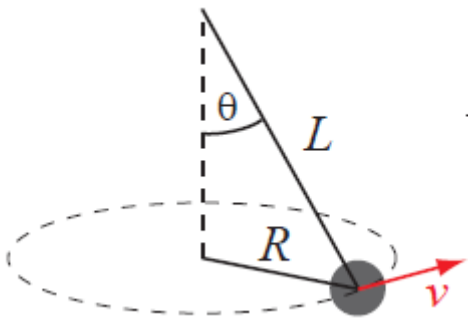
C: θ < 90°



Snordraget kan
kompensere gravitasjon 👍
⇒ nettokraft innover
⇒ sentripetalakselerasjon

Eksempel: kjeglependel (konisk pendel)

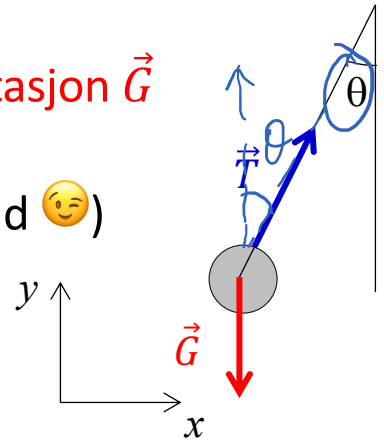
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

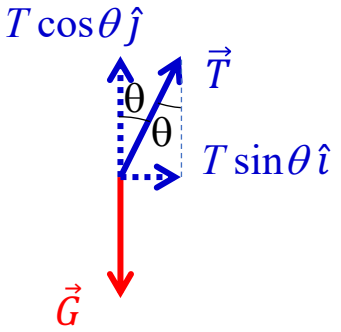


Langtrekkende kraft: gravitasjon $\vec{G}$

Kontaktkraft: snordraget $\vec{T}$

(Vi ser bort fra luftmotstand 😉)





N2L: $\Sigma F_x = T_x = T\sin\theta = ma_x$

$\Sigma F_y = T_y - mg = T\cos\theta - mg = ma_y = 0$ (Ingen bev. i y-retn)

Bevegelse i horisontalt plan, ingen bevegelse i *y*-retning:

$a_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$

$\Rightarrow \underline{T = \frac{mg}{\cos\theta}}$

$\underline{\theta = 0^\circ}$: $\cos(0^\circ) = 1 \Rightarrow \underline{T = mg}$

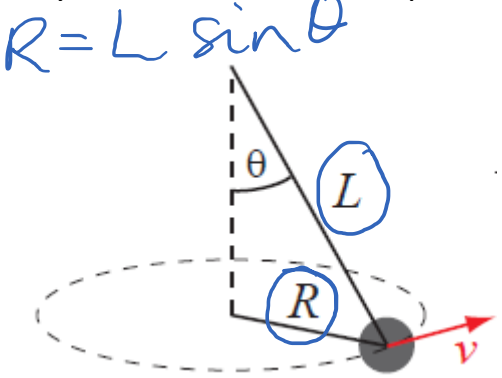
$\underline{\theta \to 90^\circ??}$ $\cos(\theta \to 90^\circ) \to 0$

$T \to \infty$!

Eksempel: kjeglependel (konisk pendel)

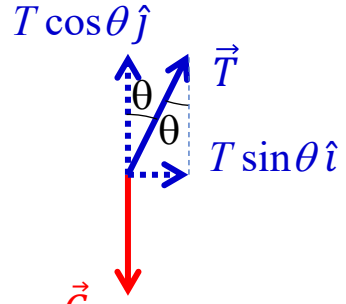
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$R = L\sin\theta$



N2L: $\sum F_y = T\cos(\theta) - mg = 0$

$$T = \frac{mg}{\cos(\theta)} \quad (2)$$



Horisontal retn: $\Sigma F_x = T\sin\theta = ma_x$ (1)

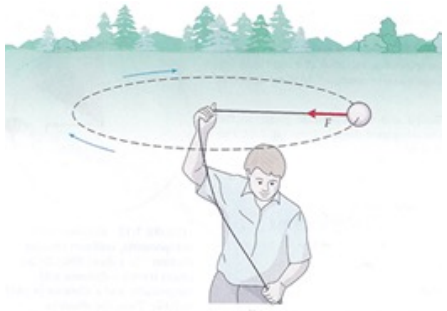
Trenger ***sentripetalakselerasjon*** for å holde sirkelbanen:

$$a_x = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = L\sin\theta\,\omega^2$$

Setter inn i (1): $T\sin\theta = mL\sin\theta\,\omega^2$

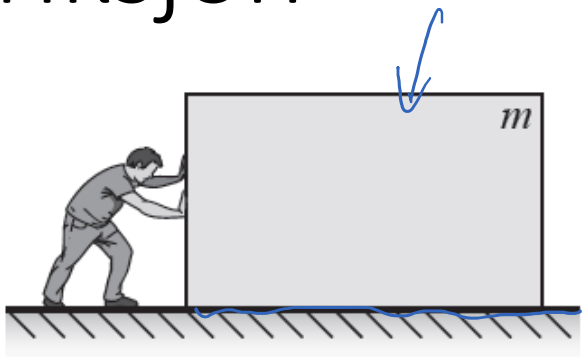
Bruker (2): $T = \frac{mg}{\cos\theta} = mL\omega^2$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$



$\theta = 90^o$ krever *uendelig stor* vinkelfart og snordrag 😱

Friksjon



Hvorfor kan vi dytte en liten masse, men ikke en stor?

Jeg dytter og massen dytter meg tilbake *like mye* etter Newtons 3.lov.
Men hvorfor kan jeg få en mindre masse til å bevege seg?

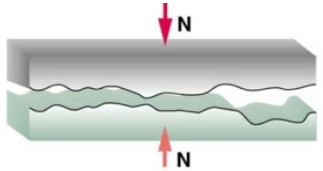
Hva skjer? 🤔

Normalkraft: mikroskopiske deformasjoner

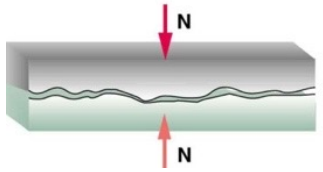
Modell: kassen og gulvet «limt sammen» med små fjærer

Vertikalt: gravitasjonskraft dytter på fjærene som dytter tilbake ⇒ normalkraften tilpasser seg, kompenserer gravitasjon:

N2L: $N - mg = ma_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = mg$



lite normalkraft
lite friksjon



stor normalkraft
stor friksjon

Horisontalt: jeg dytter og fjærene dytter tilbake

- dytter jeg *hardt nok* brytes koblingen (fjærene «går i stykker»)

I modellen er friksjon koblet til normalkraften

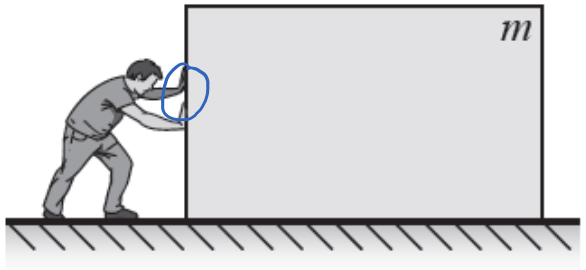
Empirisk lov for **statisk friksjon**: $f_s < f_{s,max} = \mu_s N$

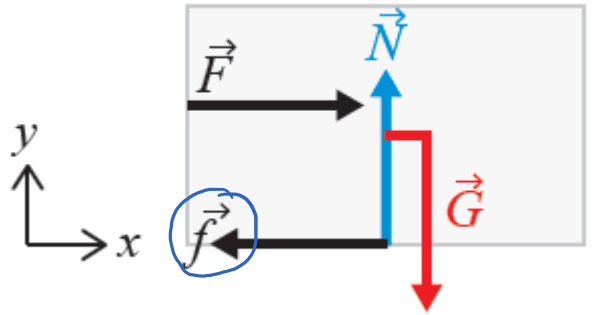
μ_s: statisk friksjonskoeffisient (dimensjonsløs) $0 \leq \mu_s < \infty$

Kompliserte prosesser
- Dette er bare en *tilnærming*!

Statisk friksjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]





$\vec{N}$: normalkraft

$\vec{G}$: tyngdekraft

$\vec{f}$: statisk friksjon

$\vec{F}$: skyvekraft

Statisk tilfelle: ingen bevegelse $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$

Vertikalt: $N - G = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg$

Horisontalt: $F - f = ma_x = 0 \Rightarrow f = F$

Friksjonskraften er like stor som kraften F fra mannen på kassen, men bare dersom: $F < f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg$

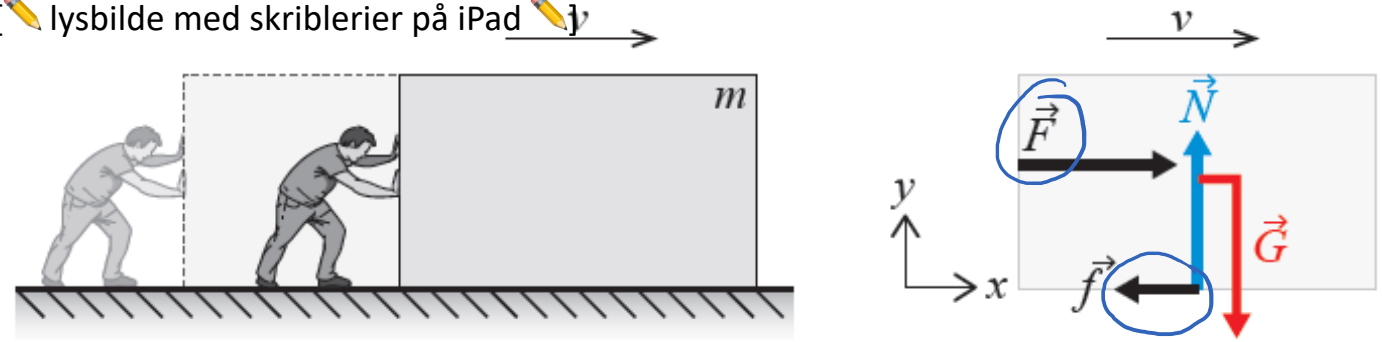
Dersom $F > f_{s,max}$: $F - f = ma_x > 0$!

Kassen beveger seg til høyre

Vi har brukt betingelsen at kassen er i ro.
Hvis kassen beveger seg, er den statiske friksjonsloven ikke lenger gyldig!

Dynamisk friksjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Mannen øker kraften slik at kassen begynner å skli

Hvis han stopper å dytte vil kassen også stoppe
⇒ det er fortsatt en friksjonskraft som bremser
⇒ *dynamisk* friksjon

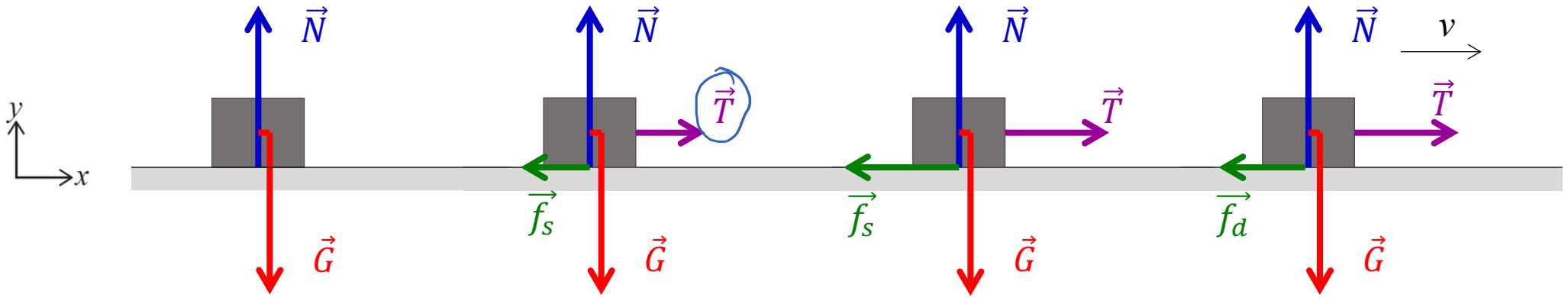
*Empirisk lo*v for **dynamisk friksjon** (Amontons' lov): $f_d = \mu_d N$

Kraften virker *mot* (den relative) bevegelsesretningen: $\vec{f}_d = -\mu_d |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\mu_d < \mu_s$

Enhetsvektor i hastighetsretning

Igjen er dette en *tilnærming*!

Statisk og dynamisk friksjon



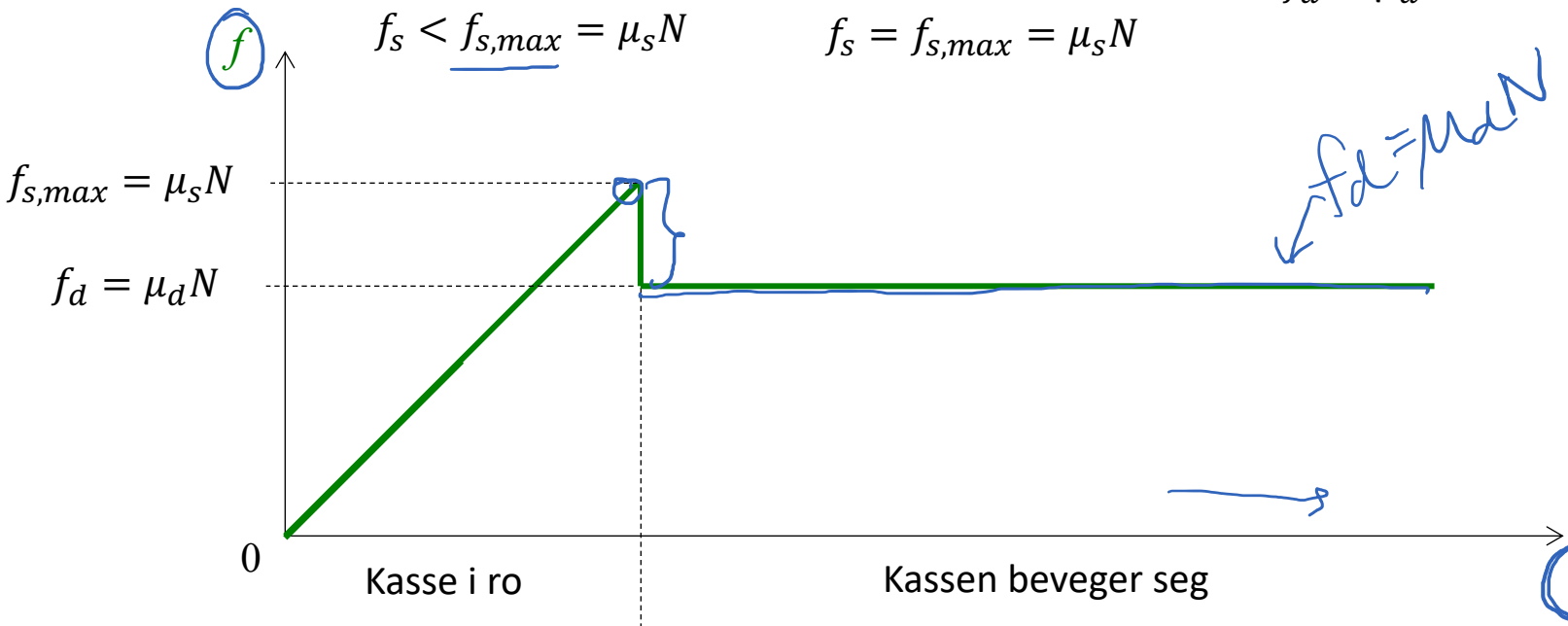
Ingen horisontal kraft
Ingen friksjon

Liten kraft $\vec{T}$
Kassen forblir i ro
Statisk friksjon:
$f_s < f_{s,max} = \mu_s N$

Større kraft $\vec{T}$
Kassen begynner
å skli når:
$f_s = f_{s,max} = \mu_s N$

Kassen sklir
Dynamisk friksjon:
$f_d = \mu_d N$

$\mu_d < \mu_s$



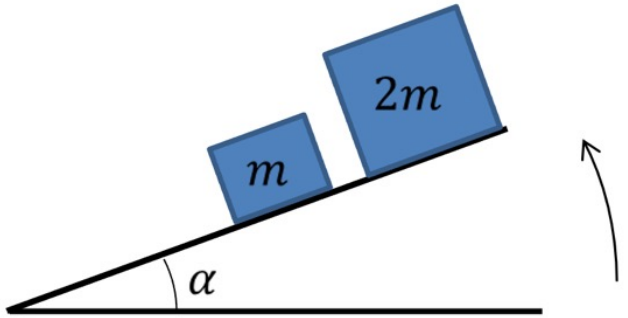
$T > f_d$ akselerasjon
$T = f_d$ konstant fart
$T < f_d$ kassen bremser opp

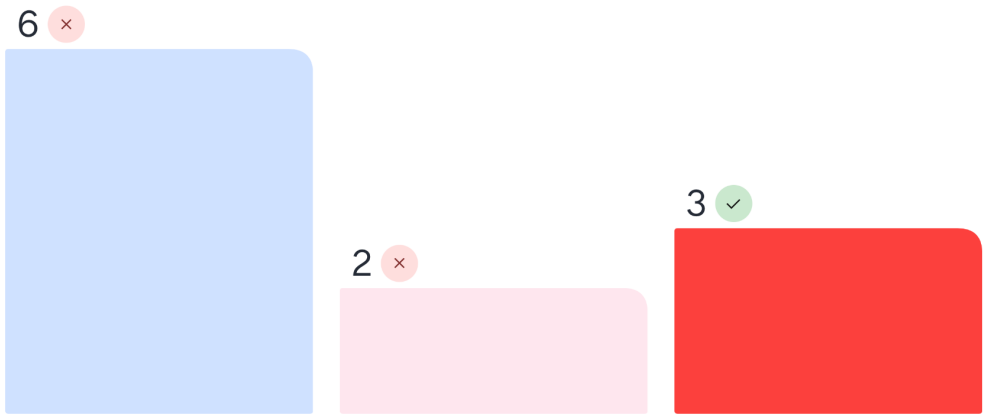
Mentimeter Kasser på et skråplan

www.menti.com kode 6374 2579

To kasser med masse m og $2m$ står på et skråplan. Vi øker helningsvinkelen α jevnt og trutt. Hvilken av kassene vil begynne å skli først?

1. den lille
2. den store
3. begge sklir samtidig

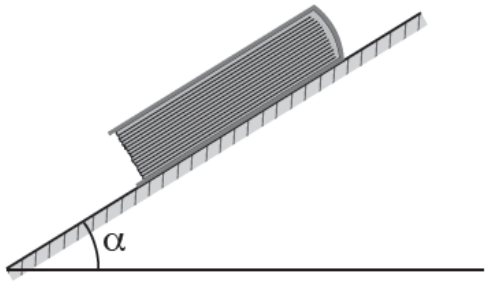




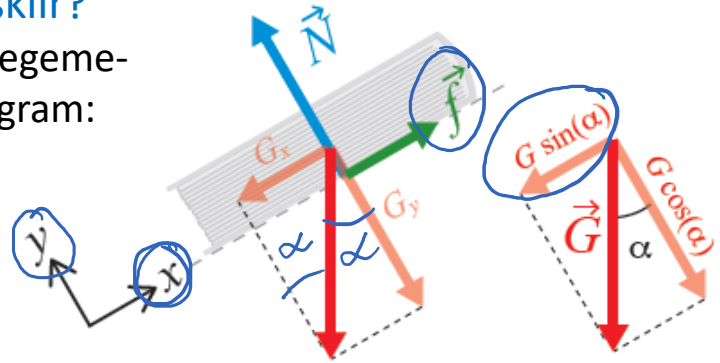
Eksempel: Bok på et skråplan

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Bok på et skråplan: hvor stor må vinkelen være for at boken sklir?



Frilegeme-diagram:



Kontaktkrefter:
- normalkraft $\vec{N}$
- friksjonskraft $\vec{f}$

Langtrekkende kraft:
- gravitasjon $\vec{G}$

Vi velger x-aksen langs skråplanet.

Liten vinkel: $G \sin\alpha$ er liten
$\Rightarrow$ friksjon f er liten

Stor vinkel: $G \sin\alpha$ er stor
$\Rightarrow$ friksjon f er (for) stor

Vi antar først at boken *ikke* sklir.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$$

I *y*-retning: $N - mg\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \underline{N = mg\cos\alpha}$

I *x*-retning: $f - mg\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \underline{f = mg\sin\alpha}$

Betingelse for at boken *ikke* sklir: $f < f_{s,max} = \mu_s N$

$mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha$

$\tan\alpha < \mu_s$

$\boxed{\alpha < \tan^{-1}(\mu_s)}$

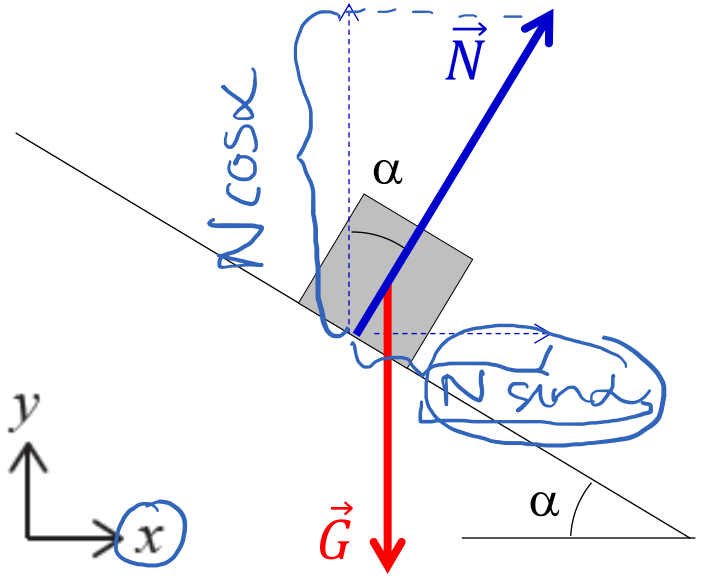
Det er lett å måle μ_s 👍

Eksempel: bil på racerbanen

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Svingen ved Daytona Speedway har en helningsvinkel $\alpha = 31°$ og krumningsradius $R = 316$ m. Hvor fort kan en bil kjøre gjennom svingen?



Uten friksjon:

Gravitasjon $G = mg$ Normalkraft N Betingelse: ingen bev. i if-retn!

N2L, vertikal:

$$\sum F_y = N\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

N2L, horisontal:

$$\sum F_x = N\sin\alpha = ma_x = m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow g\tan\alpha = \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\alpha} = \sqrt{316\,\text{m}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2\cdot\tan(31°)} \simeq 155\,\text{km/t}$$

Uten friksjon må du kjøre med akkurat denne farten for å holde banen. Hva om det *er* friksjon? 🤔

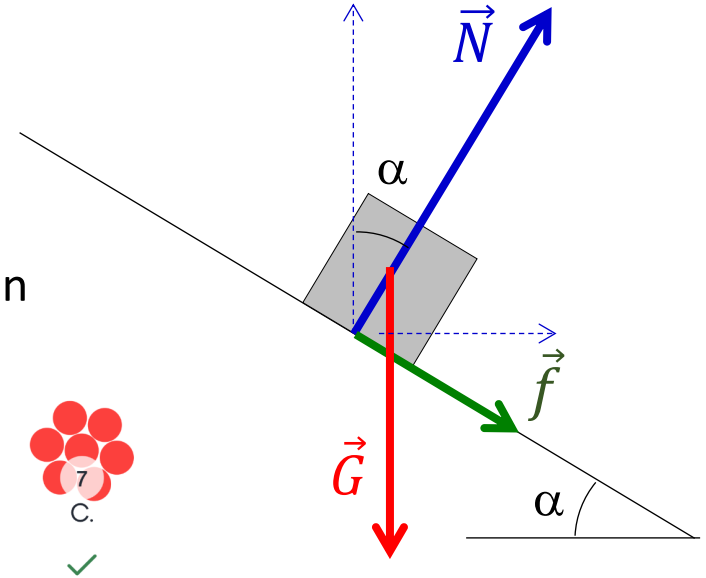
Mentimeter Racerbil i en dosert sving

www.menti.com kode 6374 2579

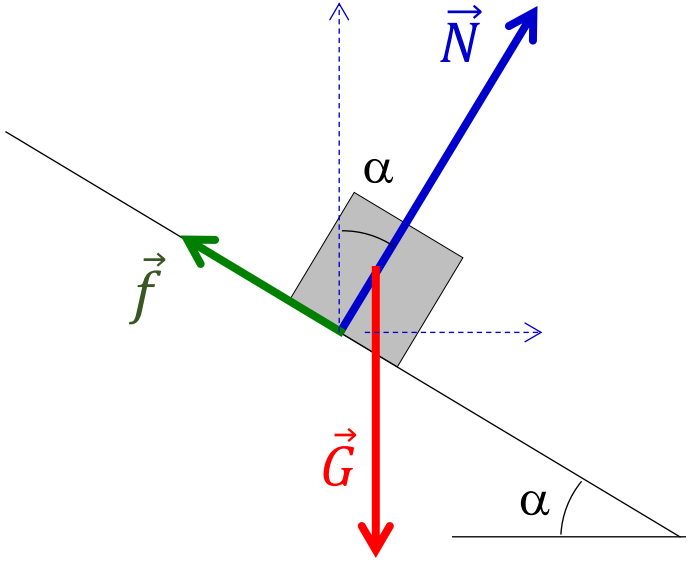
En bil kjører i svingen ved Daytona Speedway og det er friksjon mellom bakken og bildekkene. Hvilken *retning* har friksjonskraften?

A. innover
B. utover
C. avhengig av farten

2 A. ✗
10 B. ✗
7 C. ✓



Høy fart:
trenger friksjonen for å gi nok sentripetalakselerasjon



Lav fart:
trenger friksjonen for å ikke skli ned

Statisk friksjonskraft: $f_s < f_{s,max} = \mu_s N$ ⇒ Gruppeoppgave denne uka 👍

Alle våre anstrengelser så langt... 😅

En vanlig problemstilling: finn hastigheten som funksjon av posisjonen.

📝 Vi kan bruke oppskriften vår:

1. Identifiser kreftene
2. Newtons andre lov $\Rightarrow$ akselerasjonen $\vec{a}$
3. Integrasjon $\Rightarrow$ hastighet $\vec{v}(t)$
4. Integrasjon $\Rightarrow$ posisjon $\vec{r}(t)$
5. Finn tid t_1 for å komme til posisjon $\vec{r}_1$
6. Bruk tiden t_1 for å finne $\vec{v}(\vec{r}_1) = \vec{v}(t_1)$

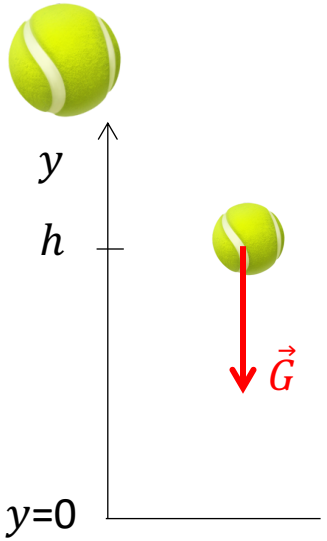
Denne metoden vil **alltid** fungere 😎
Det kan være vanskelig (eller umulig) å gjøre analytisk
$\Rightarrow$ numeriske metoder

Vi får hastigheten $\vec{v}(t)$ og posisjonen $\vec{r}(t)$ for *alle* tider.
MEN: I utgangspunktet var vi ikke interessert i *tiden*,
bare i *hastigheten* for en gitt posisjon! 🤷‍♀️

Kanskje finnes det en enklere og mer direkte metode? 💡

Eksempel: vertikalt kast av en tennisball

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Finn hastigheten til tennisballen ved en høyde h.

Vi ser bort fra luftmotstand,
eneste kraft er gravitasjon: $\sum F_y = -mg = ma \Longrightarrow a = -g$

Initialbetingelser: $y(0) = 0; v(0) = v_0$. Bevegelsesligninger, konstant akselerasjon:

$v(t) = v_0 - gt, \quad y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (1)

Tid t_1 for å komme til høyde h: $y(t_1) = h$ ($y(t_1) = h$)

$t_1^2 - \frac{2v_0}{g} t_1 + \frac{2h}{g} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}} \Rightarrow g t_1 = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

Hastighet ved høyde h: $v(t_1) = v_0 - v_0 \mp \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

Kvadrerer: $v_1^2 = v_0^2 - 2gh \quad | \cdot \frac{1}{2} m$

$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh$

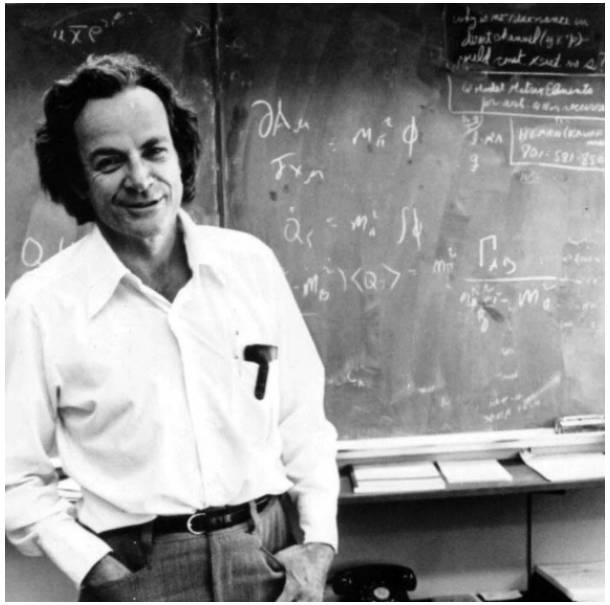
To løsninger: på vei opp og ned

$\Longrightarrow$ Energi!!! 🤩

Hva er energi? 🤔

Store Norske Leksikon: *" … den evne et mekanisk system har til å utføre arbeid."*

Hvordan kan vi *kvantifisere* energi? 🤔



Richard Feynman (1918 - 1988)
Nobelpris i fysikk, 1965

"It is important to realize that in physics today, we have *no knowledge* of what energy *is*. … However, there are formulas for calculating some numerical quantity, and we add it all together it gives "28" - always the same number. It is an abstract thing in that it does not tell us the mechanism or the reasons for the various formulas."

The Feynman Lectures on Physics, Vol.1, 4-1

- kinetisk energi
- gravitasjonsenergi
- elektrostatisk energi
- strålingsenergi
- termisk energi
- kjemisk energi
- kjerneenergi
- …

Energi: en ***bevart*** størrelse ⚖️

Vi sier at energi er en *«størrelse som er bevart»*

Noethers teorem: symmetri ⇔ bevaringslov 🤩

«homogenitet» av tiden ⇒ bevaring av *energi*
(valg av tid null)

«homogenitet» av rommet ⇒ bevaring av *driv* (*bevegelsesmengde*)
(valg av origo, koordinatsystem)

isotropi av rommet ⇒ bevaring av *spinn*
(valg av retning)



Emmy Noether
1882 - 1935

Takk for i dag! 😀