FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

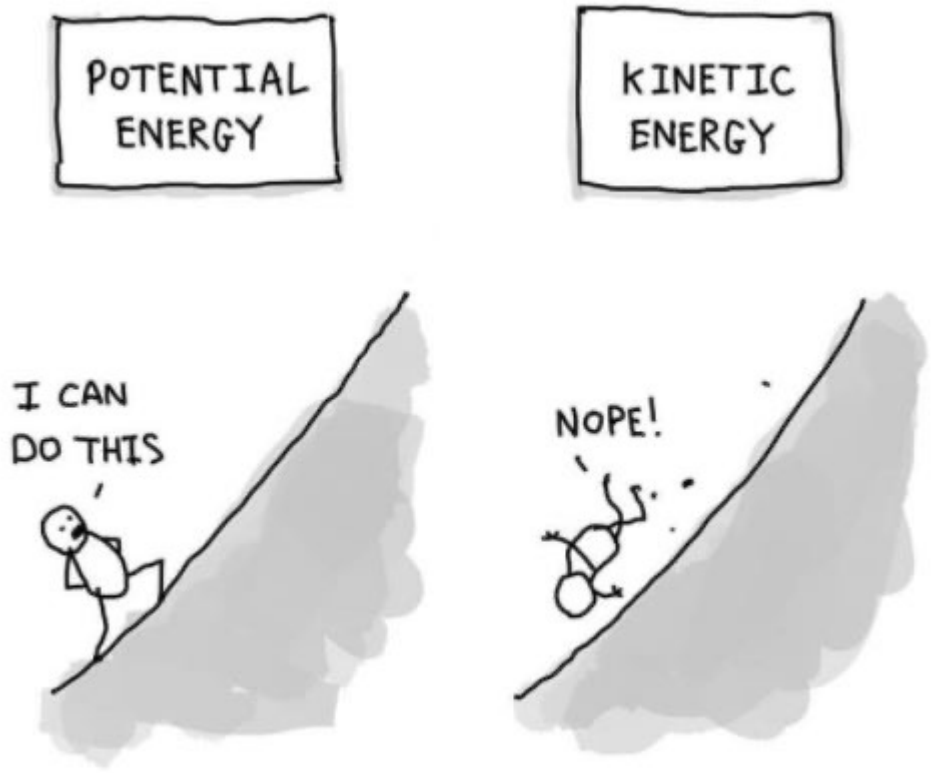
Forelesning uke 6: Mer om arbeid-energi-teoremet. Potensiell energi, og bevaring av mekanisk energi

(AMS 10.3, 10.4, 11.1, 11.2)

Læringsmål: arbeid-energi-teoremet i 2D&3D, vite hva ***potensiell energi*** er, ***konservative krefter*** og ***bevaring av mekanisk energi***.

Beskjeder:

- ✓ Oblig 2 frist på fredag, 28. februar – spesifisering til teksten mellom oppgave a) og b)
- ✓ Eksperiment 1 i morgen. Ingen rapport – godkjennes av en faglærer på seminaret eller etter seminartimen 😊



Credit: Avi Steinberg

Mandag 24.02.2025

Repetisjon fra forrige uke 😄

Definisjon på kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv_x^2$

Definisjon på arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net}(t, x, v_x) v_x dt$

→ ***Positivt*** hvis kraft og hastighet har samme retning, ***negativt*** hvis motsatt retning.

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

Spesialtilfelle 1 (én dimensjon):

Arbeid hvis kraften *bare* er posisjonsavhengig: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net} v_x dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x^{net}(x)\, dx$

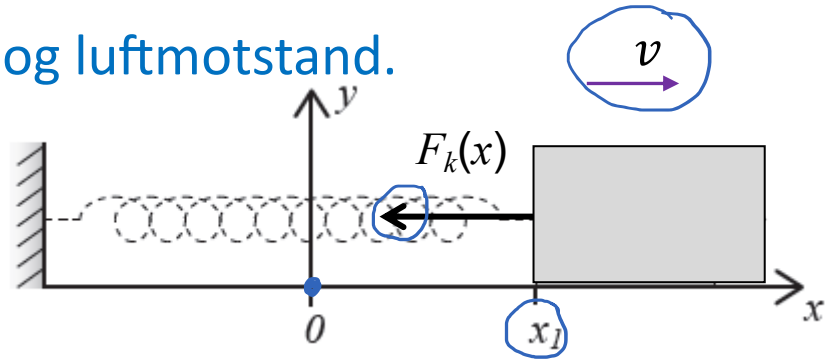
Spesialtilfelle 2 (én dimensjon):

Arbeid hvis kraften er *konstant*: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net} v_x dt = F\int_{x_0}^{x_1} dx = F(x_1 - x_0) = F\Delta x$

Eksempel: Fjærkraft og arbeid

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En kloss er festet til ei fjær og beveger seg uten friksjon og luftmotstand.



$F_k(x)$: kraft fra fjæren på klossen

Fjærkraft: $F_k = -kx \longrightarrow$ Bare *posisjonsavhengig*
(likevektsposisjon $x = 0$)

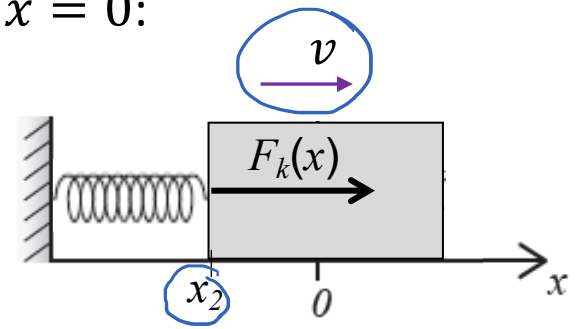
Arbeidet fjærkraften gjør på klossen fra likevektsposisjon $x = 0$ m til posisjon $x = x_1 > 0$:

$$W_{0,1} = \int_0^{x_1} F_k(x)\,dx = -k\int_0^{x_1} x\,dx = -\frac{1}{2}kx_1^2$$

Arbeidet er *negativt*: fjærkraften virker *mot* bevegelsen til klossen.

Arbeidet fjærkraften gjør på klossen fra $x = x_2 < 0$ til likevektsposisjon $x = 0$:

$$W_{2,0} = \int_{x_2}^{0} F_k(x)\,dx = -k\int_{x_2}^{0} x\,dx = -k\left[0 - \frac{1}{2}x_2^2\right] = +\frac{1}{2}kx_2^2$$



Arbeidet er *positivt*: fjærkraften virker *med* bevegelsen til klossen.

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner



Som for 1D tar vi utgangspunkt i Newtons andre lov: $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

Vi ganger med hastigheten på begge sider: $\vec{F}_{net} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$

Fra produktregelen: $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$

Vi integrerer mhp. tid på begge sider: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

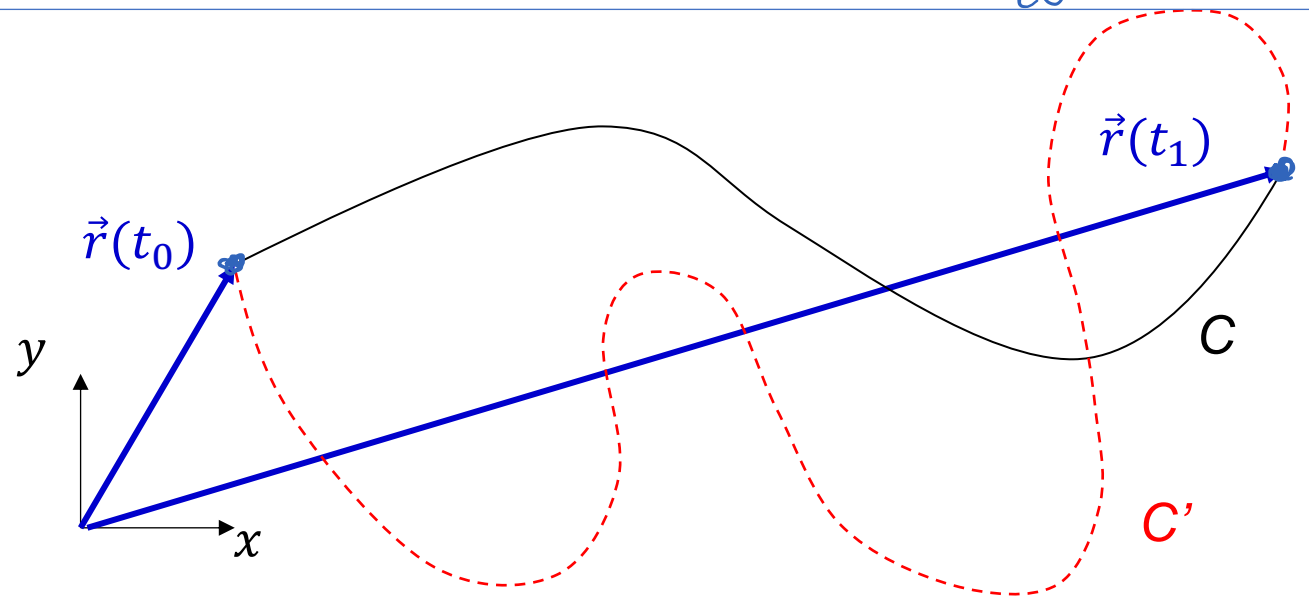
Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ **Arbeid**: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}dt$ ***Husk***: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}_{net}(\vec{r})\, d\vec{r}$



Kurveintegral langs en kurve C
- start i $\vec{r}(t_0)$
- slutt i $\vec{r}(t_1)$

Det er *mange mulige veier* for å komme fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

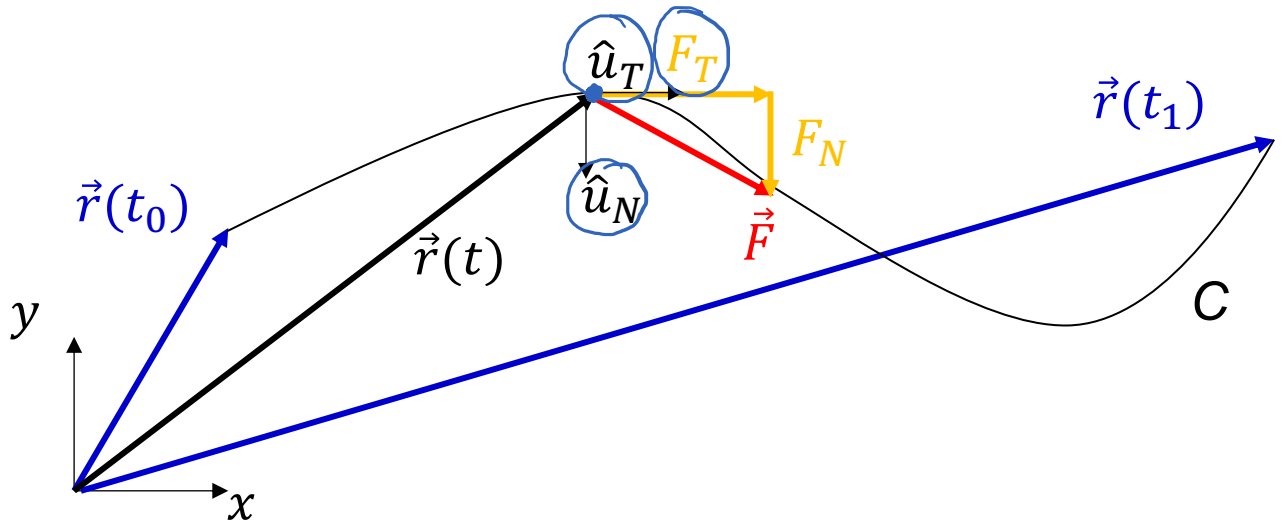
Generelt: arbeidet *avhenger av veien* fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

Eksempel: for dynamisk friksjon vil arbeidet avhenge av *hvor lang veien er*.

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid: $$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}_{net} \cdot d\vec{r}$$



Kurveintegral langs en kurve *C*
- start i $\vec{r}(t_0)$
- slutt i $\vec{r}(t_1)$

Kraften har en *tangentiell* og en *normal*komponent:

$$\vec{F} = F_T \hat{u}_T + F_N \hat{u}_N$$

Hastighetsvektor (tangentiell retn.):

$$\vec{v} = v \hat{u}_T$$

$$\hat{u}_N \cdot \hat{u}_T = 0$$
$$\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T = 1$$

Skalarprodukt:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (F_T \hat{u}_T + F_N \hat{u}_N) \cdot v \hat{u}_T = F_T v$$

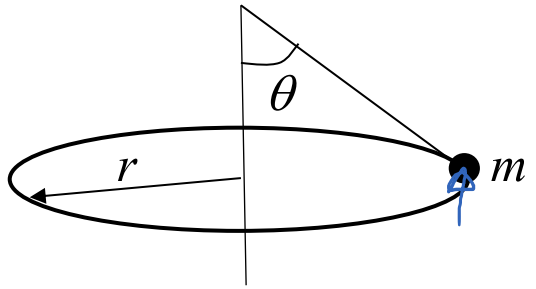
Arbeid: $$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T v dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T \frac{ds}{dt} dt = \int_C F_T ds$$

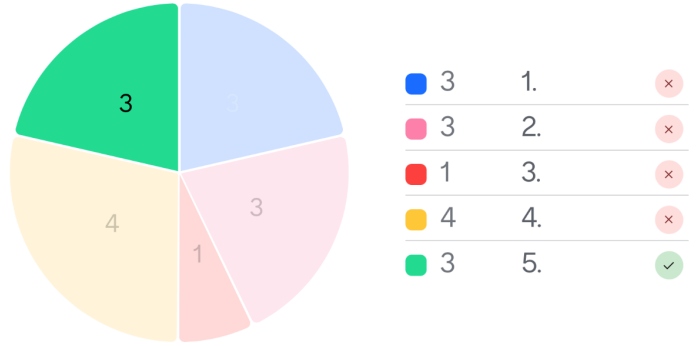
Mentimeter Svinge rundt på en tennisball

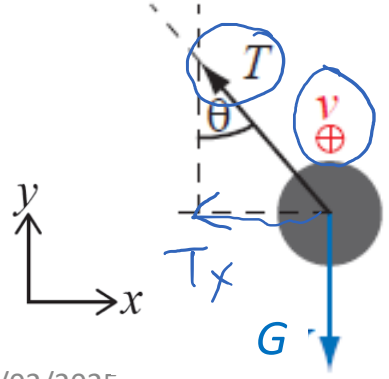
www.menti.com kode 7706 4295

Du har en tennisball med masse *m* som er festet i en snor. Du svinger den i en horisontal sirkel med radius *r*. Vi ser bort fra luftmotstanden. Hva er arbeidet utført på tennisballen i løpet av en svingeperiode (en runde rundt sirkelen)?

1. $W = mg\sin(\theta)\,2\pi r$
2. $W = mg\cos(\theta)\,2\pi r$
3. $W = mg2\pi r$
4. $W = m(\frac{v^2}{r})2\pi r$
5. $W = 0$







Nettokraft i *x*-retning:
sentripetalakselerasjon som holder massen på sirkelbanen

Kraft og vei er ortogonale i hvert punkt:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(m\frac{v^2}{R}\right)\hat{u}_N \cdot ds\hat{u}_T = 0$$

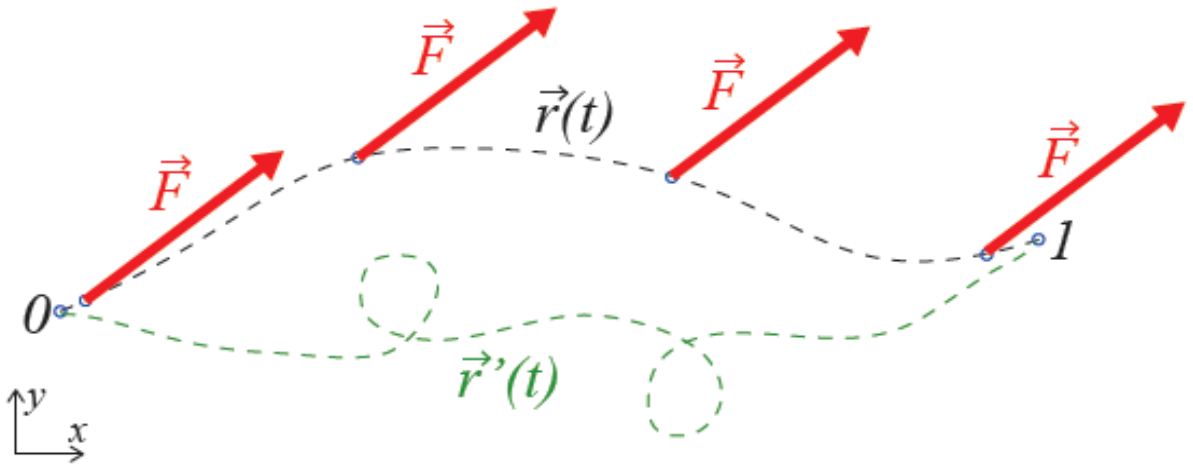
Arbeidet fra nettokraften er ***null***. 😎

Arbeid når kraften er ***konstant*** (størrelse & retning)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \vec{F} \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\, dt = \vec{F} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F}\left[\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\right] = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

For en ***konstant*** kraft er ***arbeidet uavhengig av veien***:



En kraft med denne egenskapen kalles en ***konservativ kraft***.

Eksempel på en konservativ kraft: gravitasjon

Generelt: konservative krefter er kun *posisjonsavhengige*

Eksempler på krefter som *ikke* er konservative: friksjon, luftmotstand

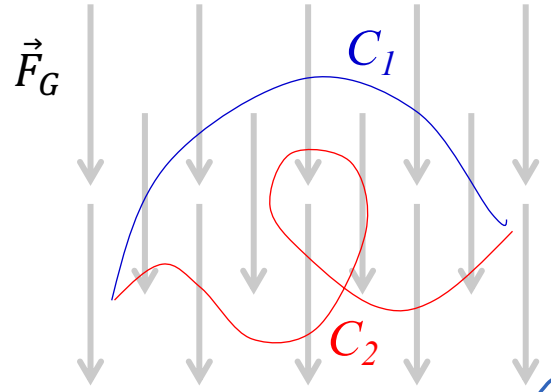
Generelt: *hastighetsavhengige* krefter er *ikke* konservative

Konservative og ikke-konservative krefter

Konservative krefter

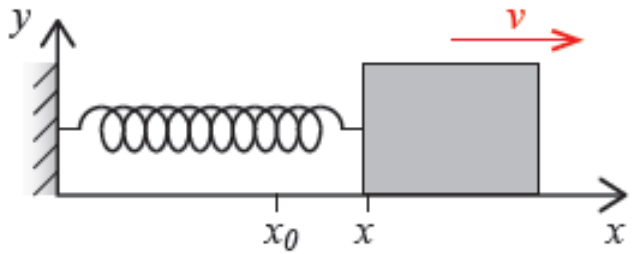
Gravitasjon: $\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

På jorden: $\vec{F}_G = -mg\hat{j}$



Arbeidet er ikke avhengig av veien

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$



Arbeidet er *reversibelt*

Ikke-konservative krefter:

Luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Friksjon: $\vec{f}_d = -\mu_d|\vec{N}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Hastighetsavhengige krefter:

- Arbeidet er *avhengig av veien*
- Arbeidet er *irreversibelt*

Pass på:
konservativ kraft ⇔ arbeid uavhengig av veien

konservativ kraft $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ kraft bare posisjonsavhengig

Spesialtilfelle for 1D:
konservativ kraft ⇔ kraft bare posisjonsavhengig

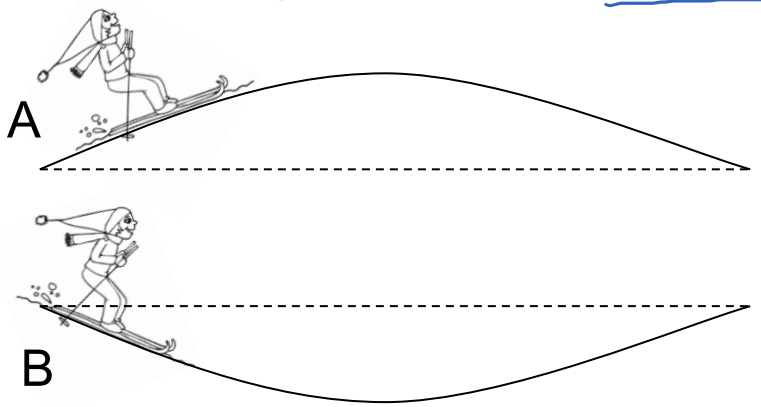
Mentimeter Ute på skitur

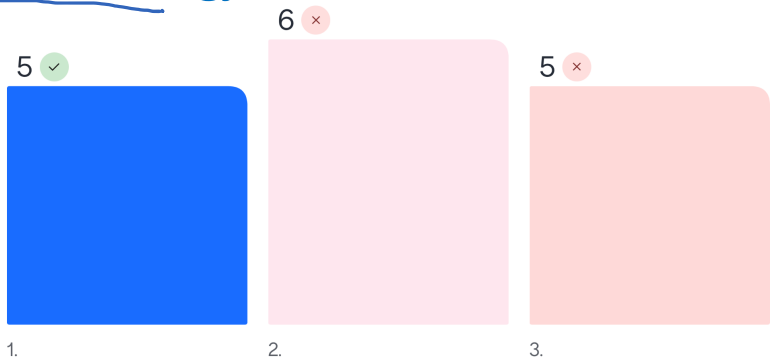
www.menti.com kode 7706 4295

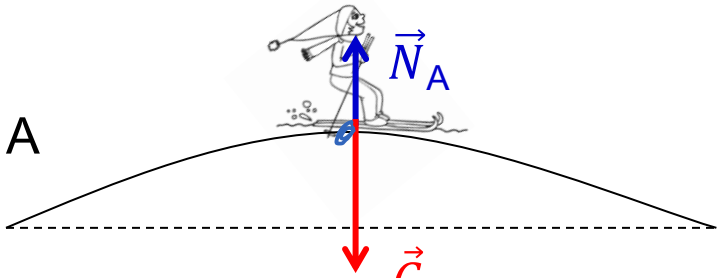
Glidefriksjon ☺ $|\vec{f}_d| = \mu_d |\vec{N}|$

En langrennsløper kan velge å skli over en liten bakke A eller ned gjennom en senkning B (like lang vei, lik krumningsradius). Hva er riktig om arbeidet friksjonskraften gjør?

1. $|W_A| < |W_B|$
2. $|W_A| = |W_B|$
3. $|W_A| > |W_B|$



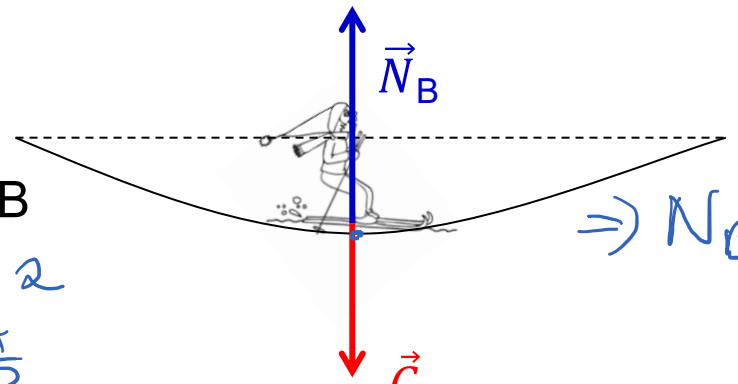




y↑

N2L, A: $N_A - G = ma_y = -m\frac{v_A^2}{R}$

$N_A = mg - m\frac{v_A^2}{R} < mg$



N2L, B

$N_B - G = ma_y = +m\frac{v_B^2}{R}$

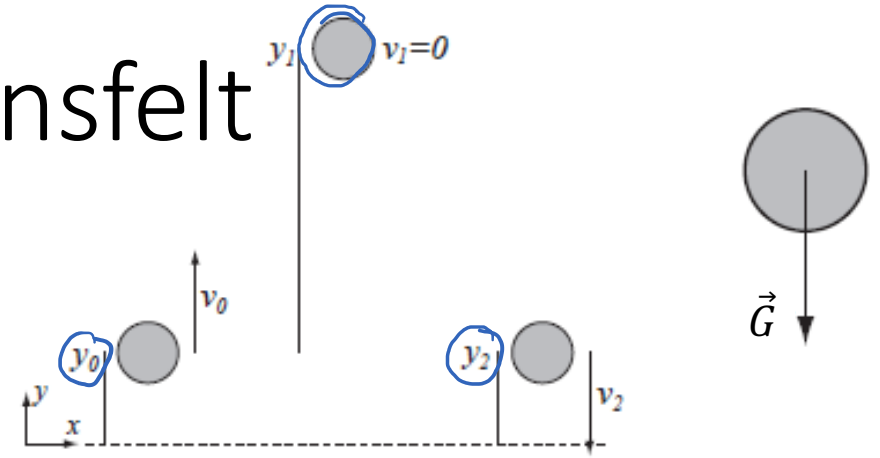
$\Rightarrow N_B = mg + m\frac{v_B^2}{R} > mg$

Vi får: $f_B = \mu_d N_B > \mu_d N_A$

$\Rightarrow W_A < W_B$

Eksempel: arbeid i et gravitasjonsfelt

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Jeg kaster en tennisball 🎾 opp i lufta med hastighet v_0.

Kinetisk energi: $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

På toppen av banen: $v_1 = 0$

$\Rightarrow K_1 = 0$

Hva har skjedd med energien? 🤔

Etter at ballen har kommet ned igjen: $y_2 = y_0$:

$v_2 = -v_0$

$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = K_0$

Hvor kommer energien fra? 🤔

💥 Energi: størrelse som er *bevart*

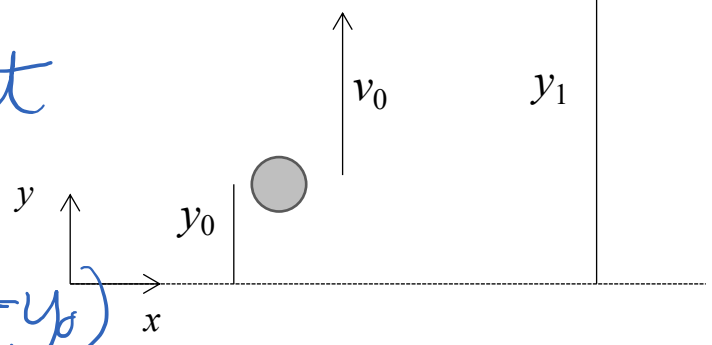
🏋️ Arbeid: tilført mekanisk energi

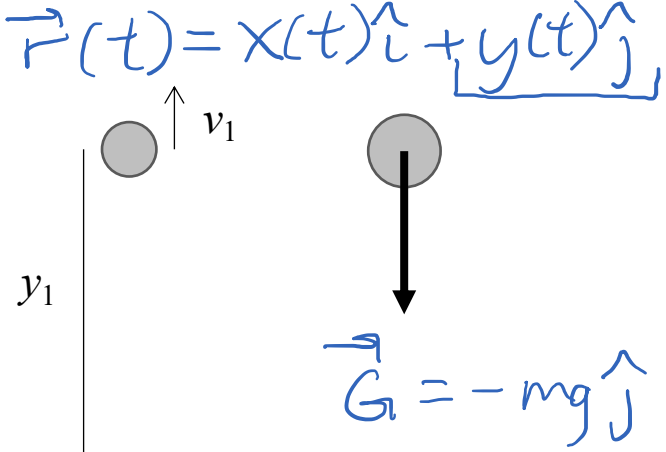
Eksempel: arbeid i et gravitasjonsfelt

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}\, dt = G \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\, dt$

$= G \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} = -mg\hat{j} \cdot \Delta\vec{r} = -mg(y_1 - y_0)$





Arbeid-energi-teoremet:

$W_{0,1} = K_1 - K_0$

$mgy_0 - mgy_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$

$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$

Kinetisk energi:

$K = \frac{1}{2}mv^2$

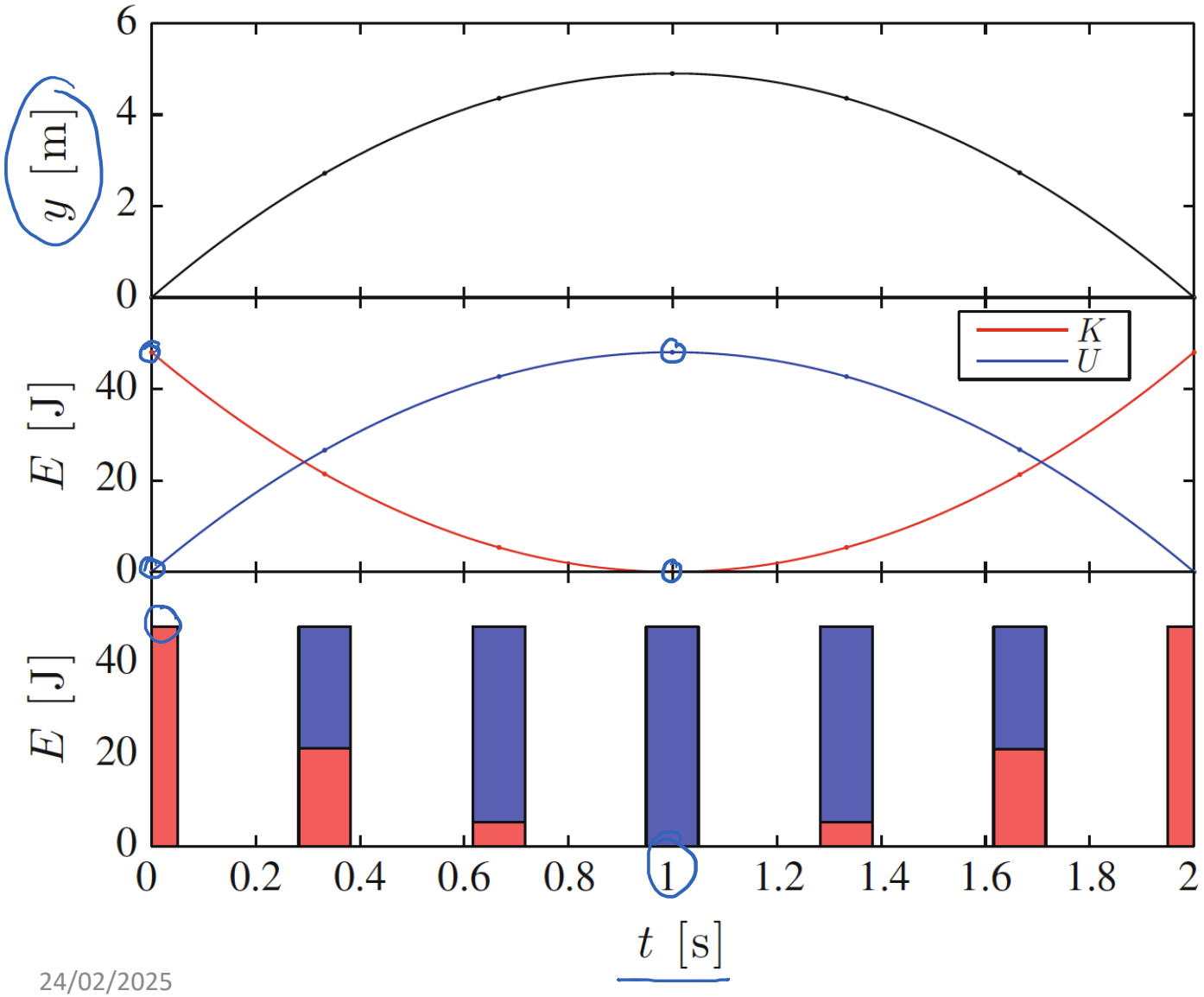
har samme enhet ⇒ energi

Potensiell energi 😎

$U = mgy$

Total, mekanisk energi er konstant: $E = U + K = \text{konstant}$

Eksempel: vertikalt kast uten luftmotstand



Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi $U = mgy$

Total mekanisk energi er konstant:

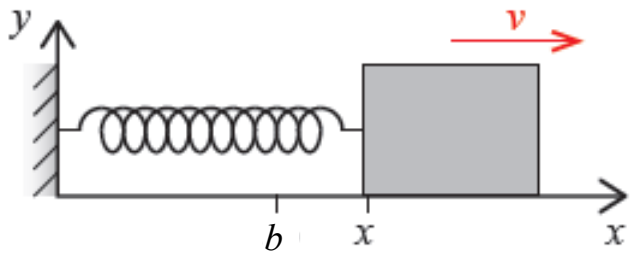
$$E = U + K$$

Bevaring av mekanisk energi 🤩

Eksempel: potensiell energi, fjærkraft

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Fjærkonstant k,
likevektslengde b



Hookes lov: $F(x) = -k(x-b)$

Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand 😉

Variabelbytte: $x' = x - b$

$dx' = dx$

Arbeid for å bevege klossen fra x_0 til x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = -k\int_{x_0}^{x_1}(x-b)\,dx = -k\int_{x_0-b}^{x_1-b} x'\,dx' = -k\left[\frac{1}{2}(x_1-b)^2 - \frac{1}{2}(x_0-b)^2\right]$$

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$\frac{1}{2}k(x_0-b)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(x_0-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1-b)^2$$

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 = E$$

$$= \text{konstant}$$

Potensiell energi for en fjær:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2$$

For *hver* konservative kraft kan vi finne *potensiell energi*! 💡

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Oppsummering: hva har vi lært så langt? 🤓

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Eksempler: gravitasjon, fjærkraft

- kraften er ***bare*** posisjonsavhengig
- arbeidet avhenger ***kun*** av start- og sluttposisjon

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = K_1 - K_0 = U(x_0) - U(x_1)$

Vi har funnet en funksjon $U(x)$ slik at: $U(x_0) - U(x_1) = K_1 - K_0$

$K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1) = E$

Mekanisk energi er bevart!

Potensiell energi: $U(x_1) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx$

$x_1 \rightarrow$ variabelen x

$\rightarrow U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \quad ; \frac{dU}{dx} = -F(x)$

Potensial (funksjon) til kraften $F(x)$

Vi kan velge en annen konstant $U(x_0)$ *uten* konsekvens for kraften F

Dersom Kraften er *bare* posisjons-avhengig (1D!) $\Leftrightarrow$ Arbeid *uavhengig* av veien $\Leftrightarrow$ Mekanisk energi er *bevart* $\Leftrightarrow$ $\frac{dU}{dx} = -F(x)$ $\Leftrightarrow$ Kraften er *konservativ*

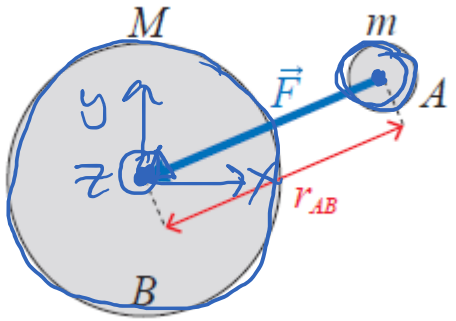
Gravitasjon i 2D & 3D

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

gravitasjonskonstanten

Generelt: $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

Enhetsvektor: $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

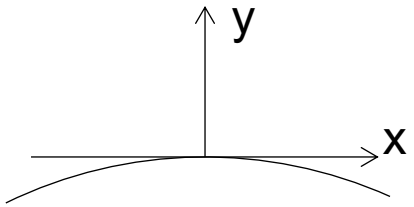


Gravitasjon er en ***sentralkraft***:
Vi plasserer ett av legemenes massesenter i origo
Kraft fra masse *M* på masse *m*:
rettet mot sentrum av masse *M* ⇒ negativt fortegn
Kraft fra *m* på *M* ⇒ positivt fortegn

Potensiell energi: $U(r) = -\frac{GmM}{r}$

Ofte ser vi på objekter på jordens overflate:

- *M* og *r* er konstant.
- Vi betrakter en lokal begrenset del av jordoverflaten.
  - vi neglisjerer krumning
  - kartesisk koordinatsystem



$\vec{F}_G = -mg\hat{j}$, $g = \frac{GM_{sol}}{R_{sol}^2}$

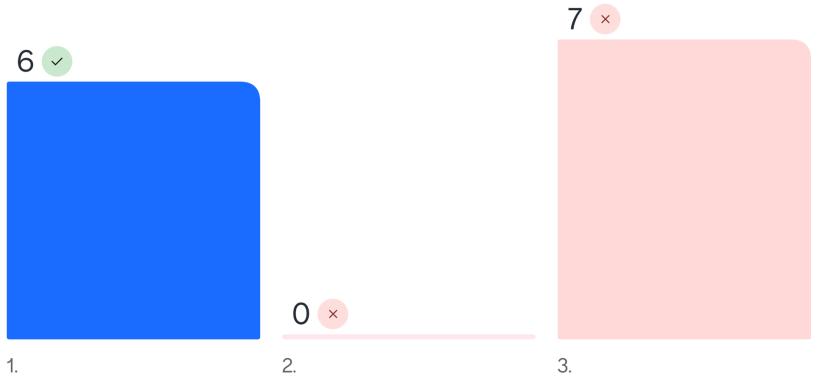
Hvis vi ser på planeters baner 🪐 eller kometer ☄️,
så må vi bruke den ***generelle gravitasjonsloven***.

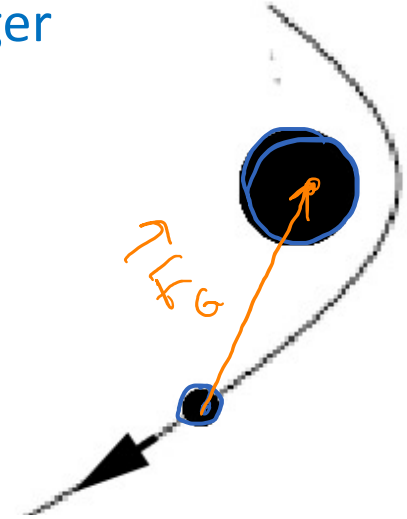
Mentimeter En komet i solsystemet

www.menti.com kode 7706 4295

En komet er påvirket av solens gravitasjon. Mens kometen beveger seg bort fra solen er forandringen i den potensielle energien

1. positiv
2. null
3. negativ





Gravitasjonskraften *fra* sola *på* kometen er rettet mot solas senter:

$$\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

$\Rightarrow$ gravitasjonskraften gjør *negativt* arbeid på kometen, som bremses

$\Rightarrow$ Kinetisk energi *minker*, potensiell energi *øker*

$$K_1 - K_0 < 0 \Rightarrow U_1 - U_0 > 0$$

Takk for i dag! 😀