FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

Forelesning uke 6: Mer om arbeid-energi-teoremet. Potensiell energi, og bevaring av mekanisk energi

(AMS 10.3, 10.4, 11.1, 11.2)

Læringsmål: arbeid-energi-teoremet i 2D&3D, vite hva ***potensiell energi*** er, ***konservative krefter*** og ***bevaring av mekanisk energi***.

Beskjeder:

✓ …

Mandag 24.02.2025

Repetisjon fra forrige uke 😁

Definisjon på kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv_x^2$

Definisjon på arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net}(t, x, v_x) v_x dt$

→ ***Positivt*** hvis kraft og hastighet har samme retning, ***negativt*** hvis motsatt retning.

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

Spesialtilfelle 1 (én dimensjon):

Arbeid hvis kraften *bare* er posisjonsavhengig: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net} v_x dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x^{net}(x)\, dx$

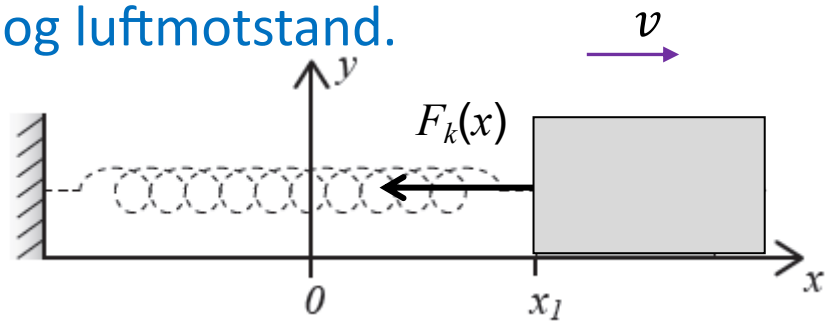
Spesialtilfelle 2 (én dimensjon):

Arbeid hvis kraften er *konstant*: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net} v_x dt = F \int_{x_0}^{x_1} dx = F(x_1 - x_0) = F\Delta x$

Eksempel: Fjærkraft og arbeid

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En kloss er festet til ei fjær og beveger seg uten friksjon og luftmotstand.



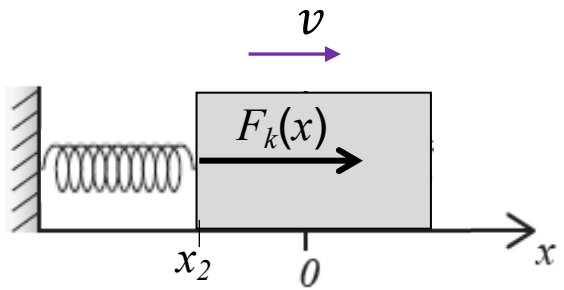
$F_k(x)$: kraft fra fjæren på klossen

Fjærkraft: $F_k = -kx \longrightarrow$ Bare *posisjonsavhengig*
(likevektsposisjon $x = 0$)

Arbeidet fjærkraften gjør på klossen fra likevektsposisjon $x = 0$ m til posisjon $x = x_1 > 0$:

Arbeidet er *positivt*: fjærkraften virker *med* bevegelsen til klossen.

Arbeidet fjærkraften gjør på klossen fra $x = x_2 < 0$ til likevektsposisjon $x = 0$:



Arbeidet er *negativt*: fjærkraften virker *mot* bevegelsen til klossen.

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner 

Som for 1D tar vi utgangspunkt i Newtons andre lov: $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

Vi ganger med hastigheten på begge sider: $\vec{F}_{net} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$

Fra produktregelen: $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$

Vi integrerer mhp. tid på begge sider: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

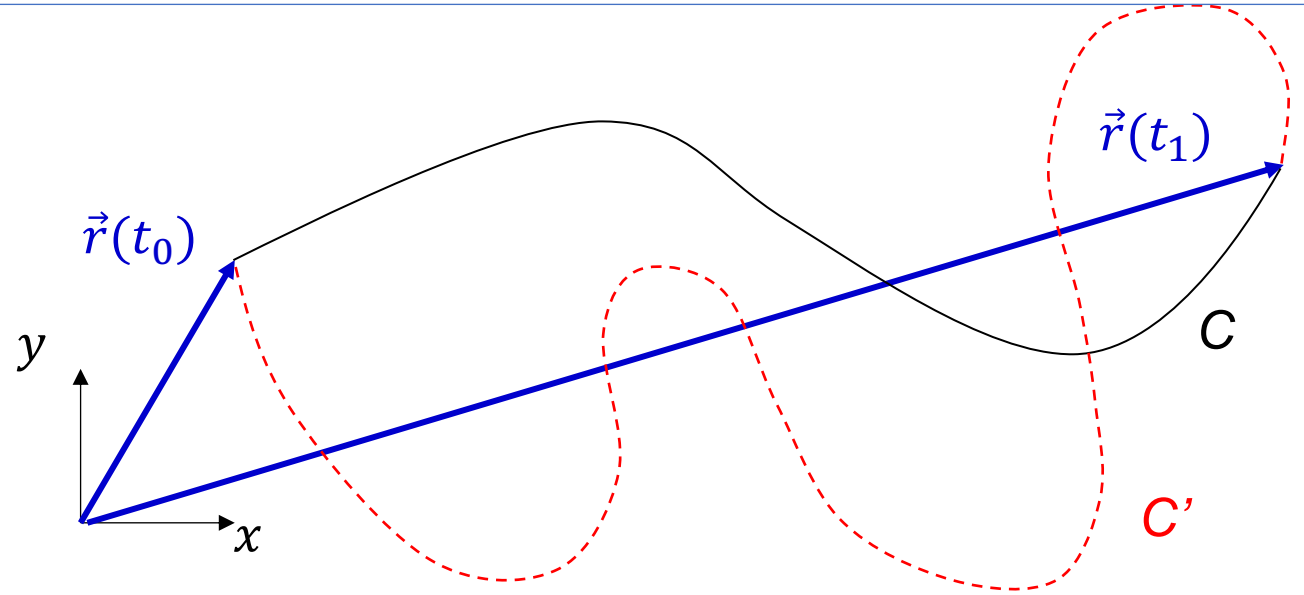
Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ **Arbeid**: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}dt$ ***Husk***: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid:



Kurveintegral langs en kurve C
- start i $\vec{r}(t_0)$
- slutt i $\vec{r}(t_1)$

Det er *mange mulige veier* for å komme fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

Generelt: arbeidet *avhenger av veien* fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

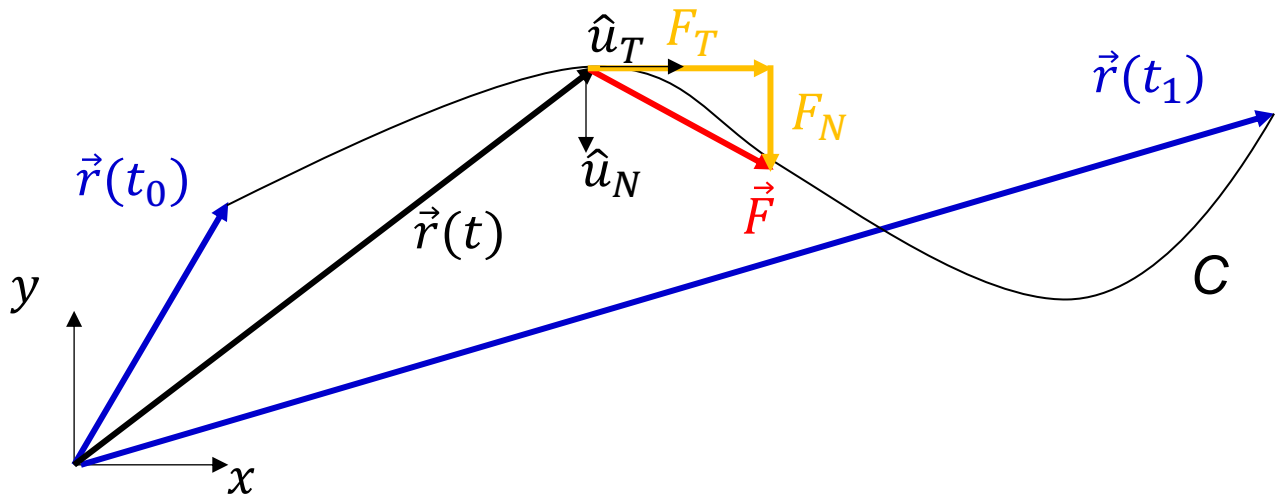
Eksempel: for dynamisk friksjon vil arbeidet avhenge av *hvor lang veien er*.

Arbeid-energi-teoremet i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid:

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}_{net} \cdot d\vec{r}$$



Kurveintegral langs en kurve *C*

- start i $\vec{r}(t_0)$
- slutt i $\vec{r}(t_1)$

Kraften har en *tangentiell*
og en *normal*komponent:

Hastighetsvektor (tangentiell retn.):

Mentimeter

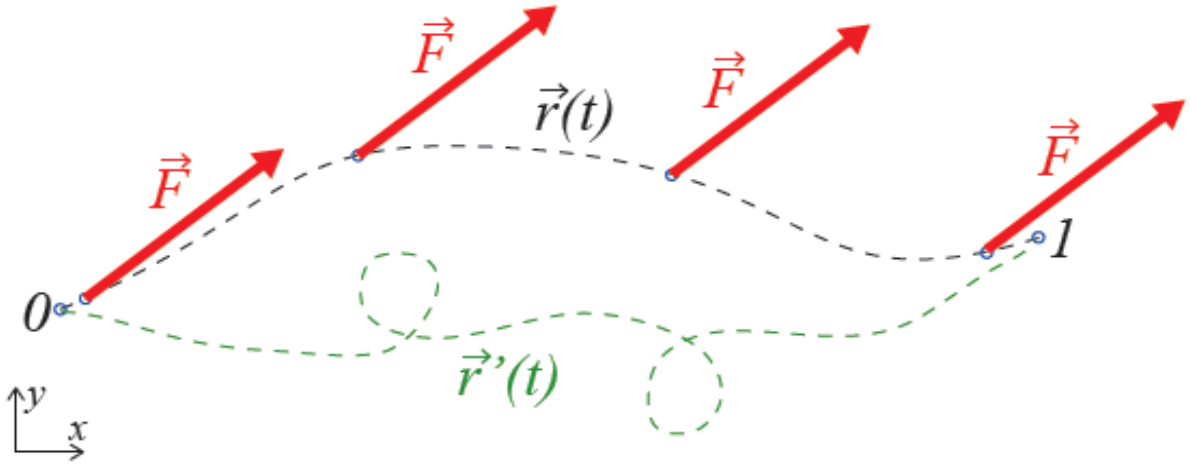
www.menti.com kode XX

Arbeid når kraften er ***konstant*** (størrelse & retning)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid:

For en ***konstant*** kraft er ***arbeidet uavhengig av veien***:



En kraft med denne egenskapen kalles en ***konservativ kraft***.

Eksempel på en konservativ kraft: gravitasjon

Generelt: konservative krefter er kun *posisjonsavhengige*

Eksempler på krefter som *ikke* er konservative: friksjon, luftmotstand

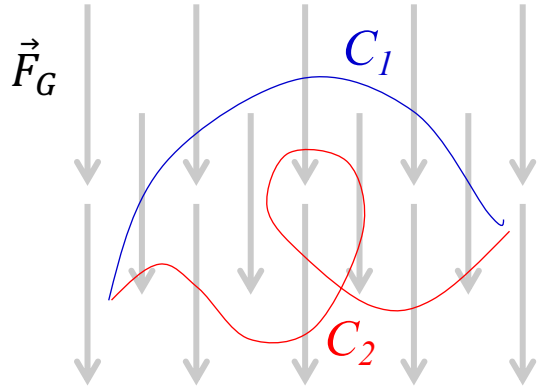
Generelt: *hastighetsavhengige* krefter er *ikke* konservative

Konservative og ikke-konservative krefter

Konservative krefter

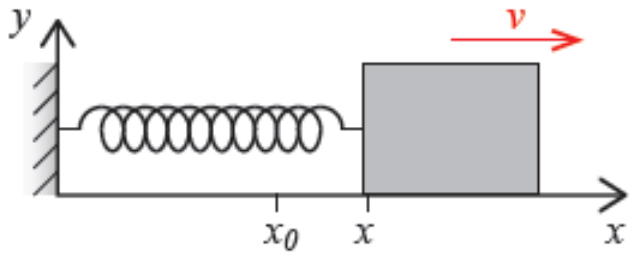
Gravitasjon: $\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

På jorden: $\vec{F}_G = -mg\hat{j}$



Arbeidet er ikke avhengig av veien

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$



Arbeidet er *reversibelt*

Ikke-konservative krefter:

Luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Friksjon: $\vec{f}_d = -\mu_d|\vec{N}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Hastighetsavhengige krefter:

- Arbeidet er *avhengig av veien*
- Arbeidet er *irreversibelt*

Pass på:
konservativ kraft $\Leftrightarrow$ arbeid uavhengig av veien

konservativ kraft $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ kraft bare posisjonsavhengig

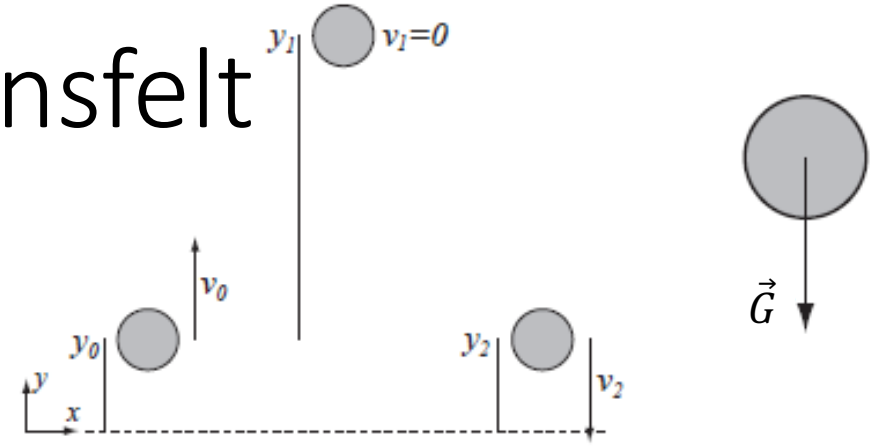
Spesialtilfelle for 1D:
konservativ kraft $\Leftrightarrow$ kraft bare posisjonsavhengig

Mentimeter

www.menti.com kode XX

Eksempel: arbeid i et gravitasjonsfelt

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Jeg kaster en tennisball 🎾 opp i lufta med hastighet v_0.

Kinetisk energi:

På toppen av banen:

Hva har skjedd med energien? 🤔

Etter at ballen har kommet ned igjen:

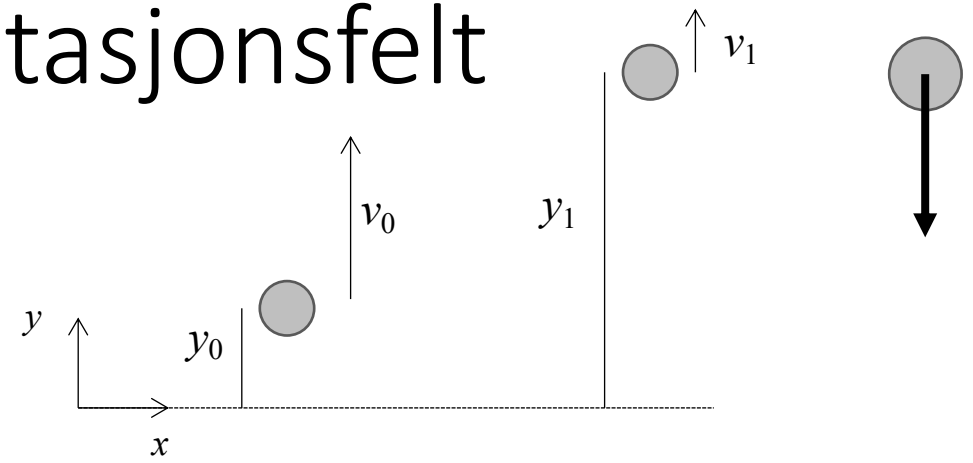
Hvor kommer energien fra? 🤔

💥 Energi: størrelse som er *bevart*

🏋️ Arbeid: tilført mekanisk energi

Eksempel: arbeid i et gravitasjonsfelt

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Arbeid:

Arbeid-energi-teoremet:

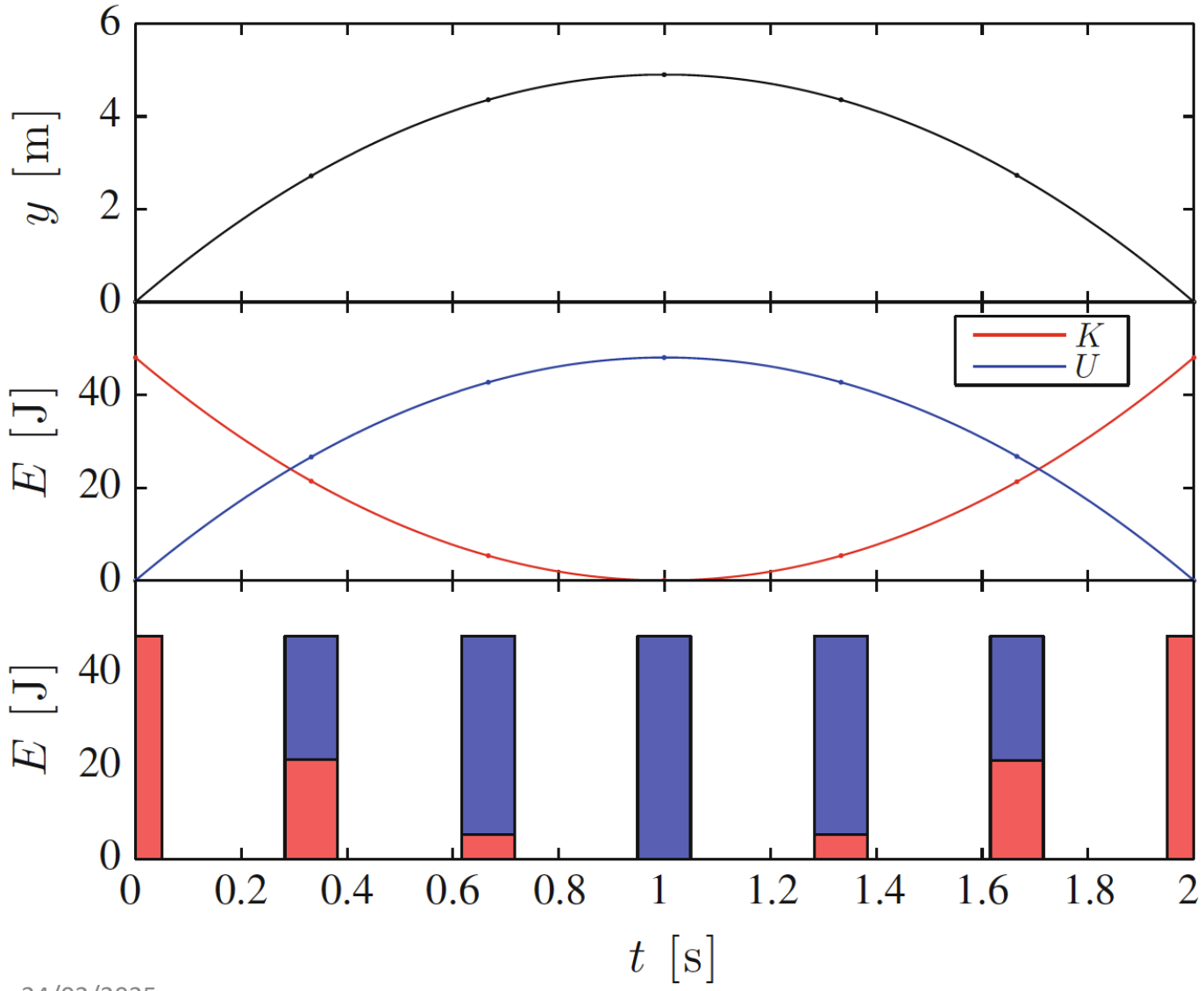
Kinetisk energi:

har samme enhet ⇒ energi

Potensiell energi 😎

Total, mekanisk energi er konstant:

Eksempel: vertikalt kast uten luftmotstand



Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi $U = mgy$

Total mekanisk energi er konstant:

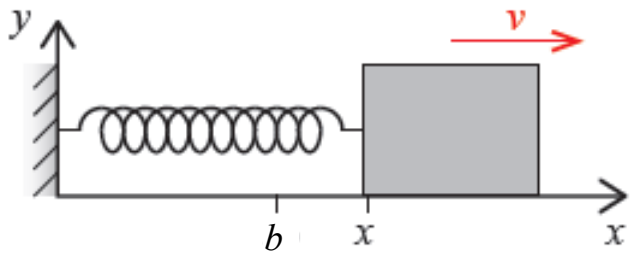
$$E = U + K$$

Bevaring av mekanisk energi 🤩

Eksempel: potensiell energi, fjærkraft

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Fjærkonstant k,
likevektslengde b



Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand 😉

Arbeid for å bevege klossen fra x_0 til x_1:

Arbeid-energi-teoremet:

Potensiell energi for en fjær:

For *hver* konservative kraft kan vi finne *potensiell energi*! 💡

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Oppsummering: hva har vi lært så langt? 🤓

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Eksempler: gravitasjon, fjærkraft

- kraften er ***bare*** posisjonsavhengig
- arbeidet avhenger ***kun*** av start- og sluttposisjon

Arbeid-energi-teoremet:

Vi har funnet en funksjon $U(x)$ slik at:

Mekanisk energi er bevart!

Potensiell energi:

Potensial til kraften F

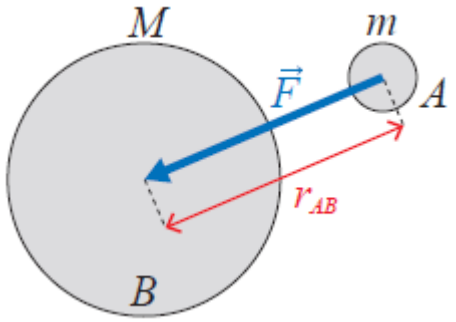
Vi kan velge en annen konstant $U(x_0)$ *uten* konsekvens for kraften F

Kraften er *bare* posisjons-avhengig (1D!) $\Leftrightarrow$ Arbeid *uavhengig* av veien $\Leftrightarrow$ Mekanisk energi er *bevart* $\Leftrightarrow$ $\frac{dU}{dx} = -F(x)$ $\Leftrightarrow$ Kraften er *konservativ*

Gravitasjon i 2D & 3D 🌍☀️

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Generelt:

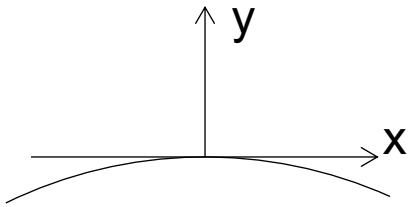


Gravitasjon er en ***sentralkraft***:
Vi plasserer ett av legemenes massesenter i origo
Kraft fra masse *M* på masse *m*:
rettet mot sentrum av masse *M* ⇒ negativt fortegn
Kraft fra *m* på *M* ⇒ positivt fortegn

Ofte ser vi på objekter på jordens overflate:

- *M* og *r* er konstant.
- Vi betrakter en lokal begrenset del av jordoverflaten.
  - vi neglisjerer krumning
  - kartesisk koordinatsystem

Potensiell energi:



Hvis vi ser på planeters baner 🪐 eller kometer ☄️,
så må vi bruke den ***generelle gravitasjonsloven***.

Mentimeter

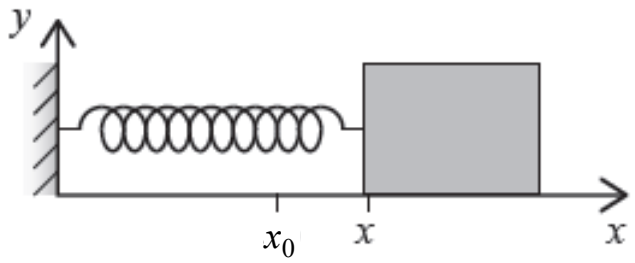
www.menti.com kode XX

Mentimeter

www.menti.com kode XX

Hvordan finne potensiell energi til en konservativ kraft? 🤔

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Eksempel: Fjærkraft, likevekts-lengde x_0

Vi kan velge $U(x_0)$, f. eks. $U(x_0) = 0$:

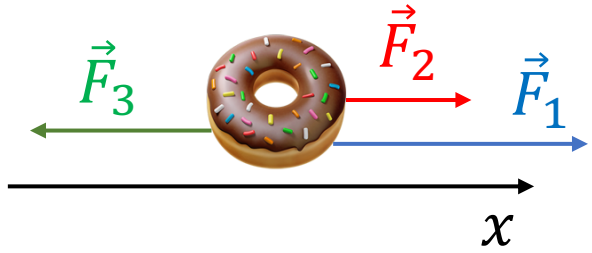
Hva om
- kraften er veldig komplisert?
- vi kjenner kraften fra en måling?

$\Rightarrow$ Numerisk integrasjon! 😀

Hva skjer om det er *flere* konservative krefter? 🤔

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Flere konservative krefter virker på et legeme langs *x*-aksen:



Siden ***alle*** kreftene $F_i(x)$ er konservative:

Arbeid-energi-teoremet:

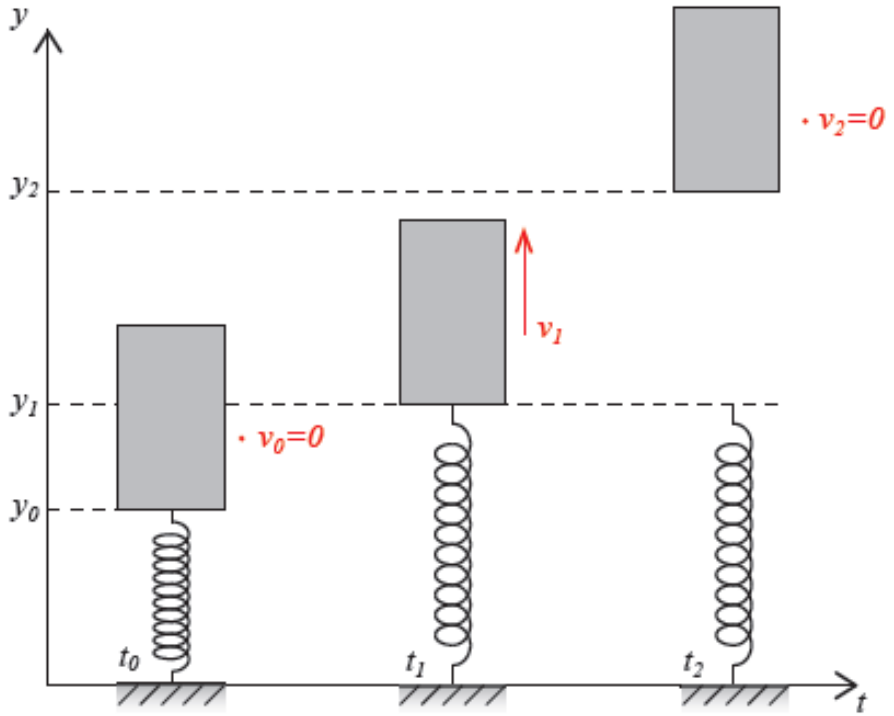
Bevaring av mekanisk energi:

Eksempel: en fjærkanon 🏹

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi har en fjær med likevektslengde y_1 og fjærkonstant k. Vi trykker en kloss ned på fjæren som vist i figuren.

Hvor høyt opp kommer klossen?



Krefter: gravitasjon, fjærkraft

- begge er konservative! 🥳

(vi ser bort fra luftmotstand 😄)

Vi kan sammenligne direkte energien ved tid t_0 og t_2:

Takk for i dag! 😀