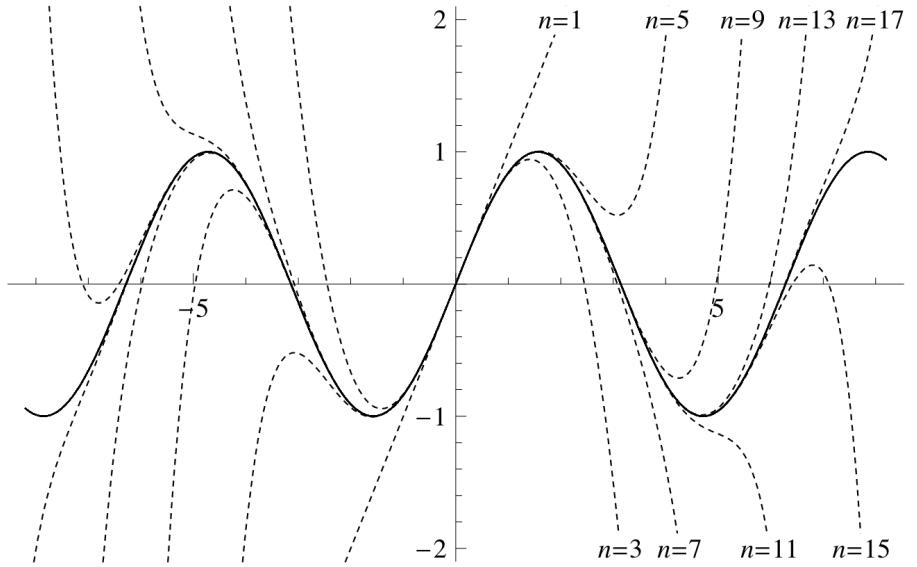
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

Forelesning uke 7: Arbeid og effekt. Potensiell energi, energi-diagrammer og likevektspunkter. Taylorrekker, 2.ordens diff-ligninger

(AMS 10.5, 11.3, Kalkulus 11.1, 11.2, 12.8 (Taylor), 10.5 (diff-lign.), AMS 9.3.2, 5.7)

Læringsmål: Vite hva ***effekt*** er, kunne lese av og bruke ***energidiagrammer,*** finne **likevektspunkter.** Bruke ***Taylorrekker*** (Taylorpolynomer) for tilnærme funksjoner. Lære om ***analytisk løsning av diff-ligninger*** i forbindelse med ***svingefenomener.***



Beskjeder:

- ✓ Mulighet for å få hjelp til eksperiment 1 (og godkjenning) i morgen. Vi kjører ellers vanlig opplegg med litt forelesning & Mentimeter + regneoppgaver 😊
- ✓ Gruppe 3 (IRIS/MAMI): veldig få studenter som møter! Please møt opp! 🙏

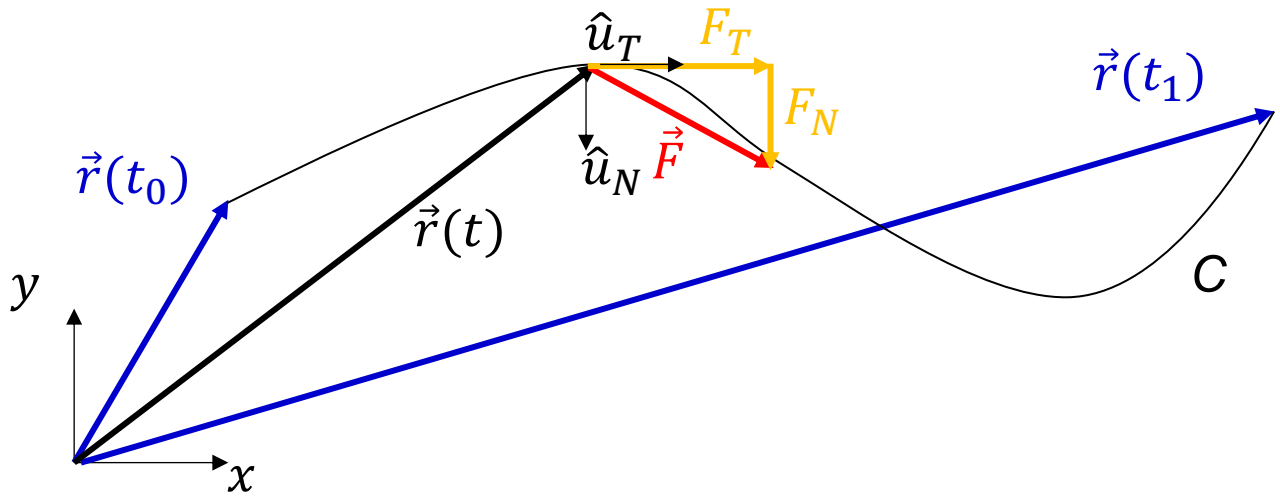
3Blue1Brown-video (takk til Tor Ole 😊)

Mandag 03.03.2025

Repetisjon fra forrige uke 😄

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Arbeid i 2D & 3D: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}_{net} \cdot d\vec{r}$



Arbeidet er gitt av den *tangentielle* komponenten til kraften :

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_C F_T ds = \int_C F_T dr$$

Kurveintegral langs en kurve *C*:
→ start i $\vec{r}(t_0)$, slutt i $\vec{r}(t_1)$.

Mange mulige veier fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$!

Generelt: arbeidet avhenger av veien! 🤯

Konservativ kraft:
- arbeidet kraften gjør er *uavhengig* av veien

📝 Oppskrift, finne potensiell energi (1D):

1. $\frac{dU}{dx} = -F(x)$
2. $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dU}{dx} dx = -\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx$
3. $U(x_1) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx$
4. $x_1 \to x$: $U(x) = U_0 - \int_{x_0}^{x} F(x')dx'$

Effekt: arbeid per tidsenhet (momentant)

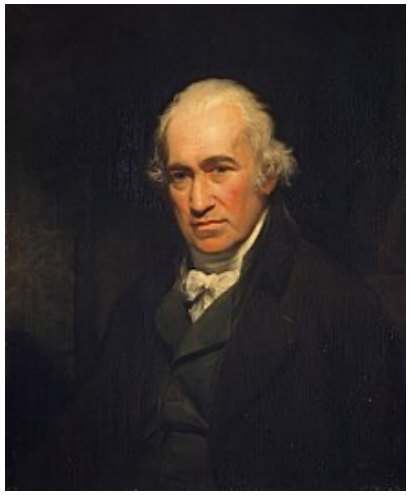
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid i et *kort* tidsintervall: $\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}\, dt'$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

I et *kort* tidsintervall er kraften konstant:

$$\Delta W = \vec{F}_{net} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}\, dt' = \vec{F}_{net} \int_{\vec{r}(t)}^{\vec{r}(t+\Delta t)} d\vec{r} = \vec{F}_{net}\left[\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right] = \vec{F}_{net} \cdot \Delta\vec{r}$$

Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F}_{net} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}$

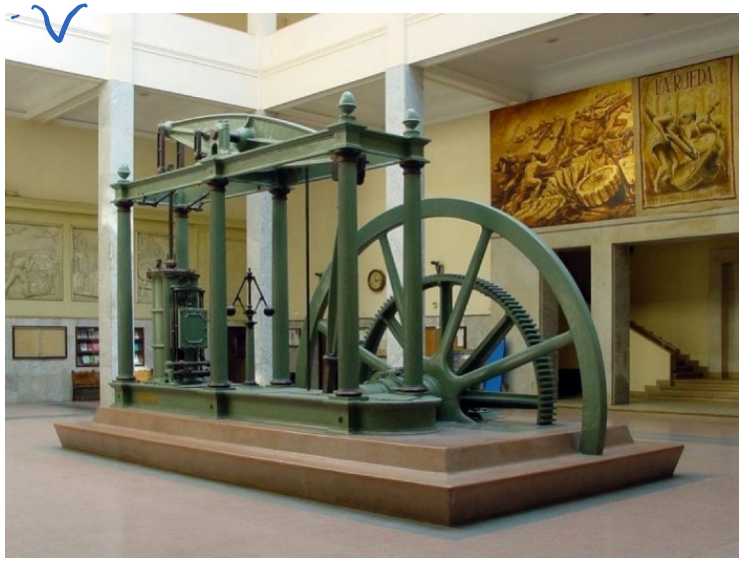


James Watt (1736 – 1819)

Enhet: 1 Watt = 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s

(1 hestekraft = 1 hk = 735.5 W)

Arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\, dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$



Mentimeter Ute på tur med Millenium Falcon 🚀

www.menti.com kode 7200 5739

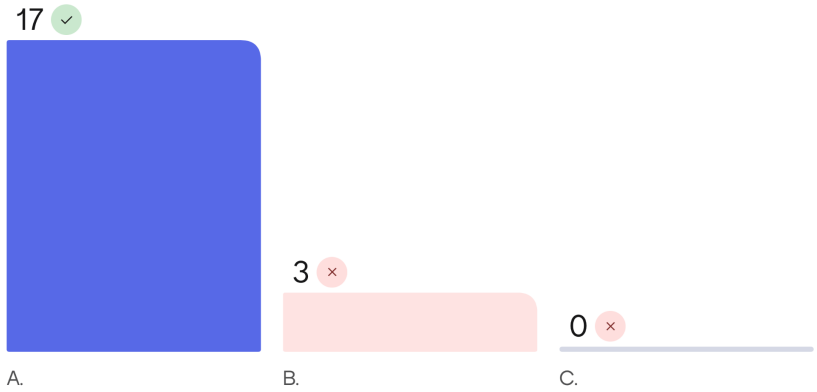
Romskipet *Millenium Falcon* er utstyrt med modifiserte Girodyne SRB42-motorer for kjøring under lyshastighet. Den konstante effekten på disse motorene er 1 GW. Han Solo og Chewbacca kjører full gass og akselererer fra 0 til 30,000 km/s. Hvilken påstand er riktig?

$P = \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}$

A. Akselerasjonen er større ved lav fart.
B. Akselerasjonen er konstant.
C. Akselerasjonen er større ved høy fart.



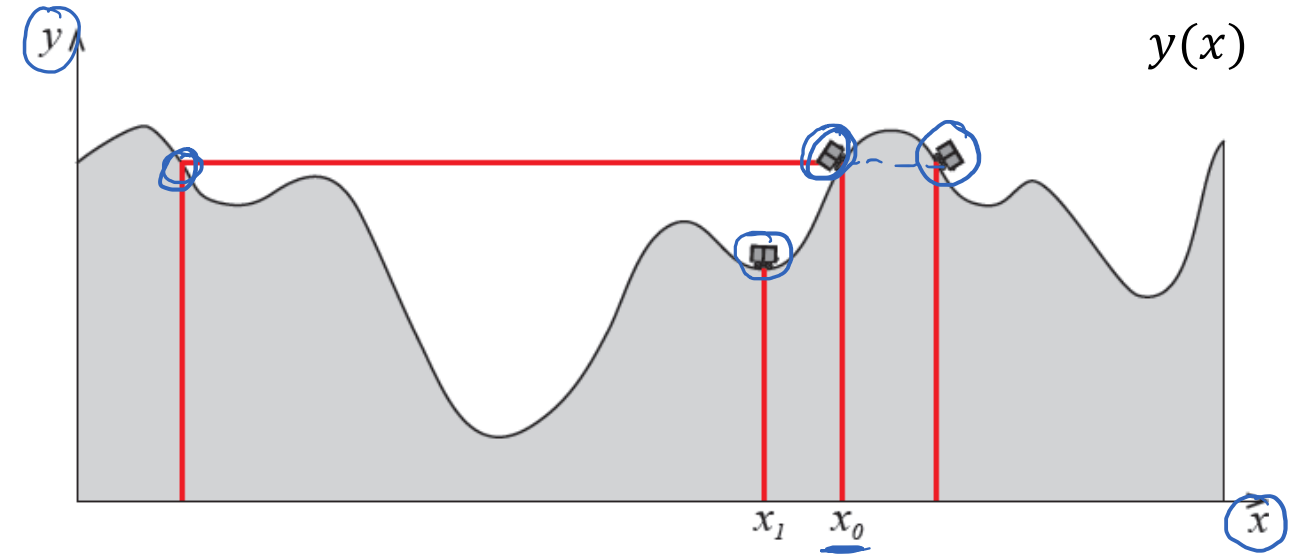
https://starwars.fandom.com/wiki/Millennium_Falcon

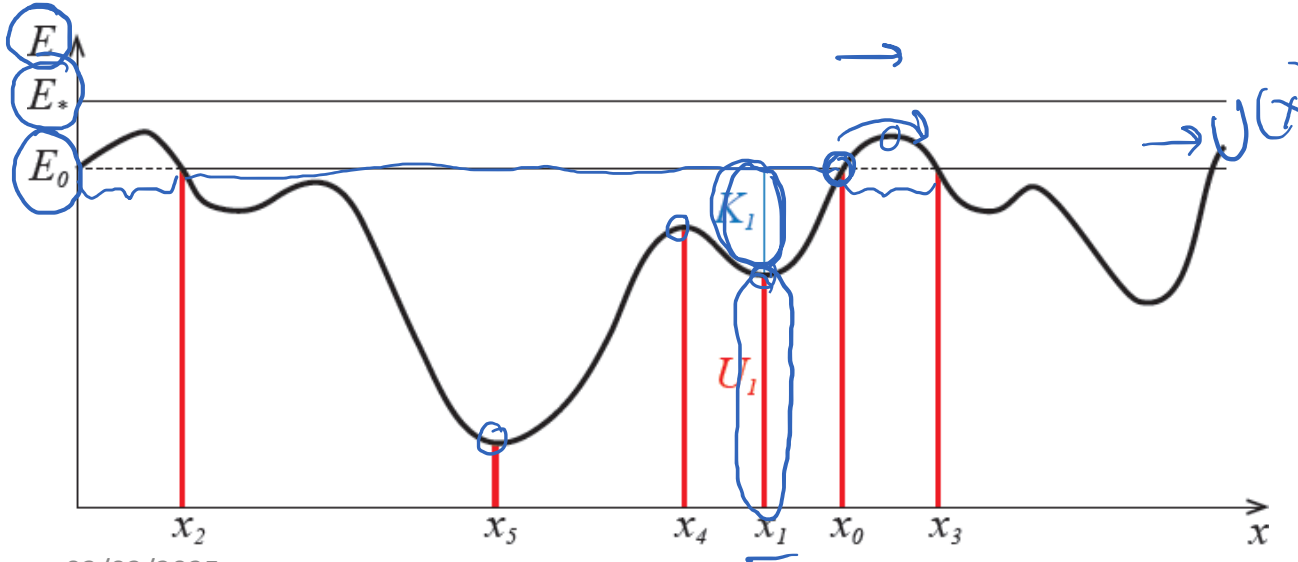


Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = konst.$

Energidiagrammer

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]





→ $U(x)=mgy$

Uten luftmotstand, friksjon 😉

Bevaring av mekanisk energi:

$E = U(x) + K(x) = \text{konstant}$

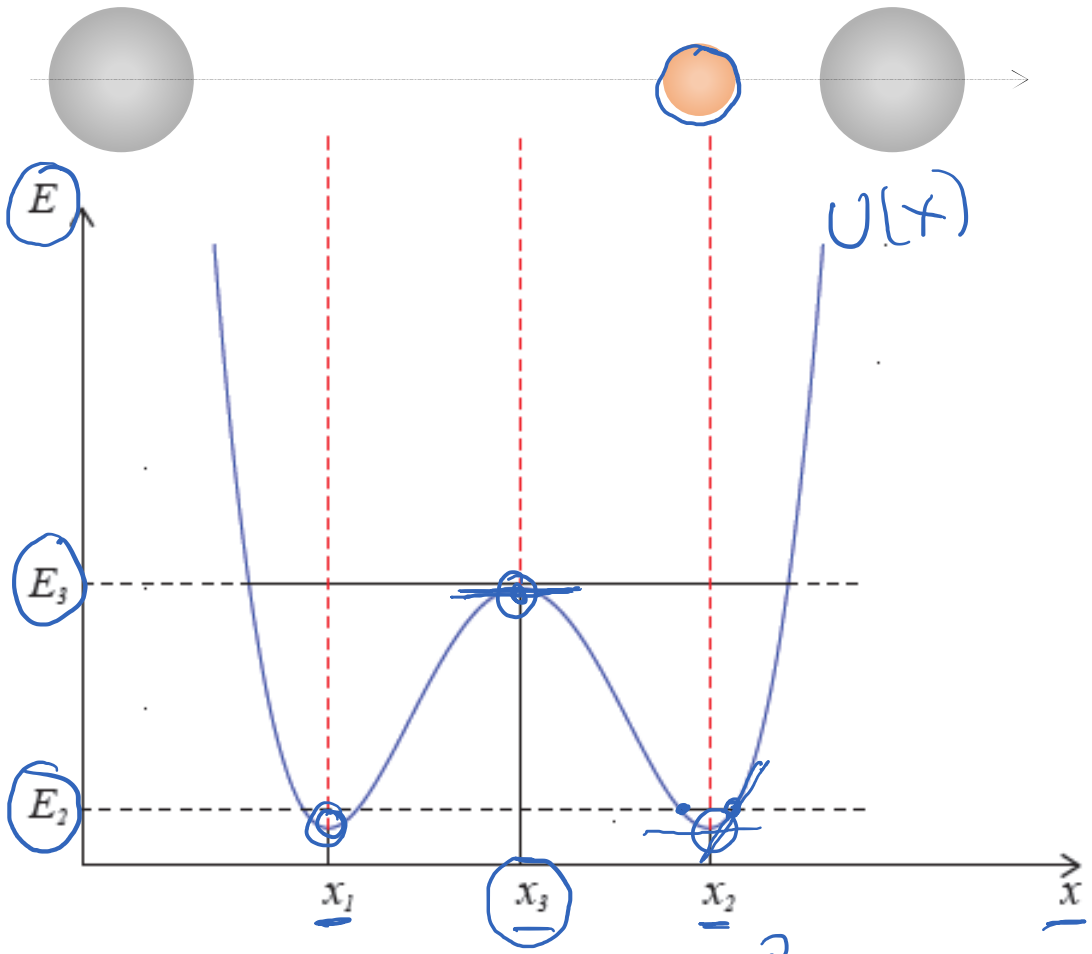
Hvis $K(x_0) = 0$,

$U(x) \leq U(x_0)$

$K(x) = E - U(x)$

Likevekt ⚖️

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Partikkel i x_2 med $v = 0$:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_2} = 0 \Rightarrow F(x_2) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_2} = 0$$

Partikkelen blir i x_2

Litt kinetisk energi: (Tot. mek. E_2)

partikkelen svinger med en liten amplitude rundt x_2

Partikkel i x_3 med $v = 0$:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_3} = 0 \Rightarrow F(x_3) = 0$$

Partikkelen blir i x_3

Litt kinetisk energi: (Tot. mek. energi E_3)

$\Rightarrow$ partikkelen beveger seg *enten* mot x_1

eller mot x_2 og fjerner seg fra x_3

Minimum i potensiell energi

$\Rightarrow$ ***stabilt*** likevektspunkt:

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

Maksimum i potensiell energi

$\Rightarrow$ ***ustabilt*** likevektspunkt:

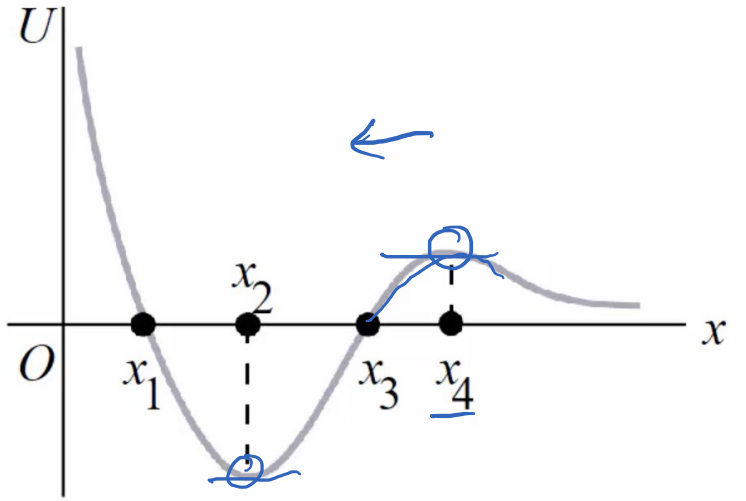
$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

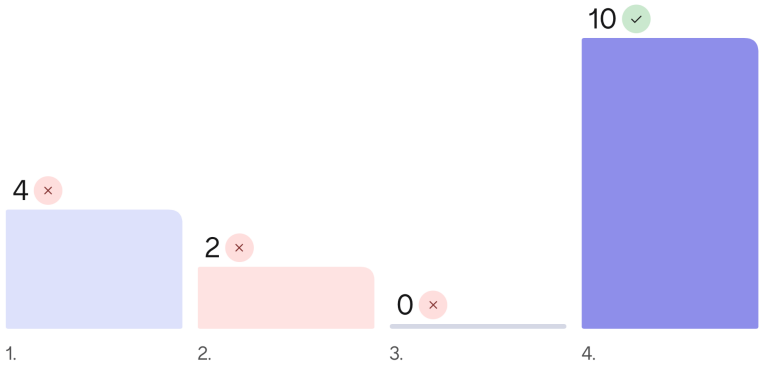
Mentimeter En partikkel 🟢

www.menti.com kode 7200 5739

Grafen viser den potensielle energien til en partikkel som beveger seg langs x-aksen. Partikkelen starter ved $x = x_4$ og beveger seg i negativ x-retning. Ved hvilke(t) av de merkede punktene er *kraften* på partikkelen null?

1. Ved både x_1 og x_3
2. Kun ved x_2
3. Kun ved x_4
4. Ved både x_2 og x_4





Stigningstallet ($\frac{dU}{dx} = -F(x)$) for funksjonen $U(x)$ er null i x_2 og x_4: svar 4 😎

Utdrag fra formelarket, relevant for neste tema 👍

Taylor-rekke til en funksjon $f(x)$ om funksjonsargumentet $x = a$:

$$T_n(f;a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)\frac{df(x=a)}{dx} + \frac{1}{2!}(x-a)^2\frac{d^2f(x=a)}{dx^2} + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n\frac{d^nf(x=a)}{dx^n}$$

Restledd: $R_n(f;a)(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}f(x=\zeta)}{dx^{n+1}}$ hvor $\zeta \in [x,a]$ er ukjent.

Difflikninger: Separabel 1.ordens lineær diff-likn.:

$q(x) \cdot \frac{dx}{dt} = p(t) \Longrightarrow \int q(x)\,dx = \int p(t)\,dt \Longrightarrow Q(x) = P(t) + C$, med $\frac{dQ}{dx} = q(x)$ og $\frac{dP}{dt} = p(t)$

2.ordens homogene lineære diff-likn. med konstante koeffisienter:

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \Longrightarrow$ Karakteristisk likn. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ med generelt to røtter $\lambda_1$og λ_2.

Generelle løsninger: To reelle røtter: $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ En reell rot: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2t\,e^{\lambda t}$

To komplekse røtter, $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib : x(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$

Taylorrekker: tilnærming til funksjoner

💡 **Ideen bak:** vi kan *tilnærme* en vanskelig funksjon med en enklere funksjon 👍



Brook Taylor
(1685-1731)



Colin Maclaurin
(1698-1746)

Bilder fra Wikipedia

Taylorrekker: formalisme

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Gitt en reell eller kompleks funksjon $f(x)$ som er uendelig mange ganger deriverbar i et område (intervall) rundt funksjonsargumentet $x = a$ hvor a er i intervallet, så er Taylorrekka til funksjonen gitt ved

$$T_n(f(x); x=a) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}(x-a)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=a}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Big|_{x=a}(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x=a}(x-a)^n$$

Kompakt form:

$$T_n(f(x); x=a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}\Big|_{x=a}(x-a)^k$$

- T_n: orden, grad (hvor mange ledd med deriverte)
- $x=a$: "hvor" vi tilnærmer $f(x)$

Dersom $n \to \infty$: $T_n(f(x))$ går mot $f(x)$

Taylorrekker: restledd (anslå feilen vi gjør fordi n er endelig)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Taylors setning: $f(x) = T_n(f;a)(x) + R_n(f;a)(x)$

Restleddet! Hvor stort er det?

Lagranges restleddformel:

$$R_n(f(x); x=a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\bigg|_{x=c}$$

c ukjent! Ligger et sted mellom a og x. avhenger av x.

Sjekke konvergens

$R_n \to 0$ når $n \to \infty$

med forholdskriteriet (s. 705 i Kalkulus)

Eksempel: Taylorrekka til $\sin(x)$ rundt $x = 0$

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vår funksjon: $f(x) = \sin x$, om $x = a = 0$

Deriverer: $\frac{df}{dx} = \cos x$, $\frac{d^2f}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3f}{dx^3} = -\cos x$, ...

Her: $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$

Vår tilnærming med Taylorrekka:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\Big|_{x=0}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=0}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Big|_{x=0}(x-0)^3 + \cdots$$

$$= 0 + 1 \cdot x - 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$ (Rottmann s. 117)

Eksempel: restleddet for Taylorrekka til $\sin(x)$

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$f(x) = \sin x$, om $x = a = 0$:

For $T_n(f(x); x=a)$: $R_n(f(x); x=a) = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} \right|_{x=c}$

$x=c$ ↑ mellom x og $a=0$

Ser på: $\left| \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} \right|_{x=c} \leq 1$ fordi $0 \leq |\sin x| \leq 1$

$0 \leq |\cos x| \leq 1$

Dermed:

$$|R_n(\sin(x), x=a=0)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| 1$$

☺

Mentimeter Et passelig lite restledd 😎

www.menti.com kode 7200 5739

$$f(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Vi fant at restleddet for Taylorrekka til $\sin(x)$, $a = 0$ er gitt ved

$$|R_n(\sin(x); a = 0)(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Hvor stor må n minst være for å sørge for at $R_n < 0.01$ for alle x i intervallet $[0,1]$?

A. $n = 2$
B. $n = 3$
C. $n = 4$
D. $n = 5$
E. $n = 6$

Holder å sjekke $R_n \leq \left|\frac{1}{(n+1)!}\right|$ $\Rightarrow x_{max} = 1$

$n = 2$: $R_2 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \approx 0.167$

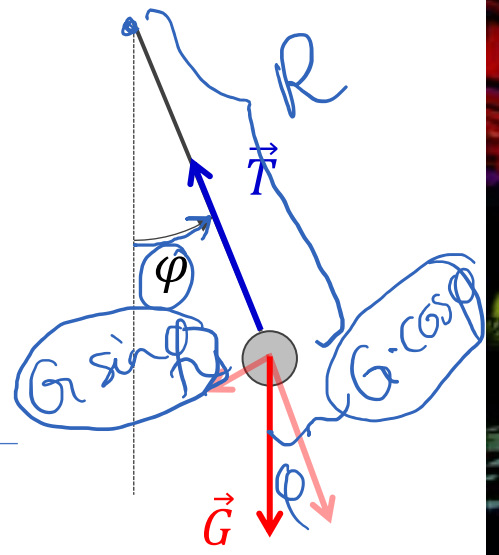
$n = 3$: $R_3 \leq \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \approx 0.042$

$n = 4$: $R_4 \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \approx 0.0083$

Eksempel: pendelen på Fysisk institutt 🥰

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Ser bort fra luftmotstand





Radiell retning (N2L):

$$T - mg\cos\varphi = ma_r = m\frac{v^2}{R}$$

Tangentiell retning (N2L):

$$-mg\sin\varphi = ma_t \Rightarrow \underline{a_t} = -g\sin\varphi \quad (i)$$

Pendelen beveger seg på en (del av en) sirkelbane: $v = \underline{R\omega}$, $a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

vinkelakselerasjon

Deler på R:

$$\Rightarrow \underline{\frac{a_t}{R}} = \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

bruker (i)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{R}\sin\varphi}$$

2. ordens homogen difflign. med konst. koeff.!

Takk for i dag! 😀