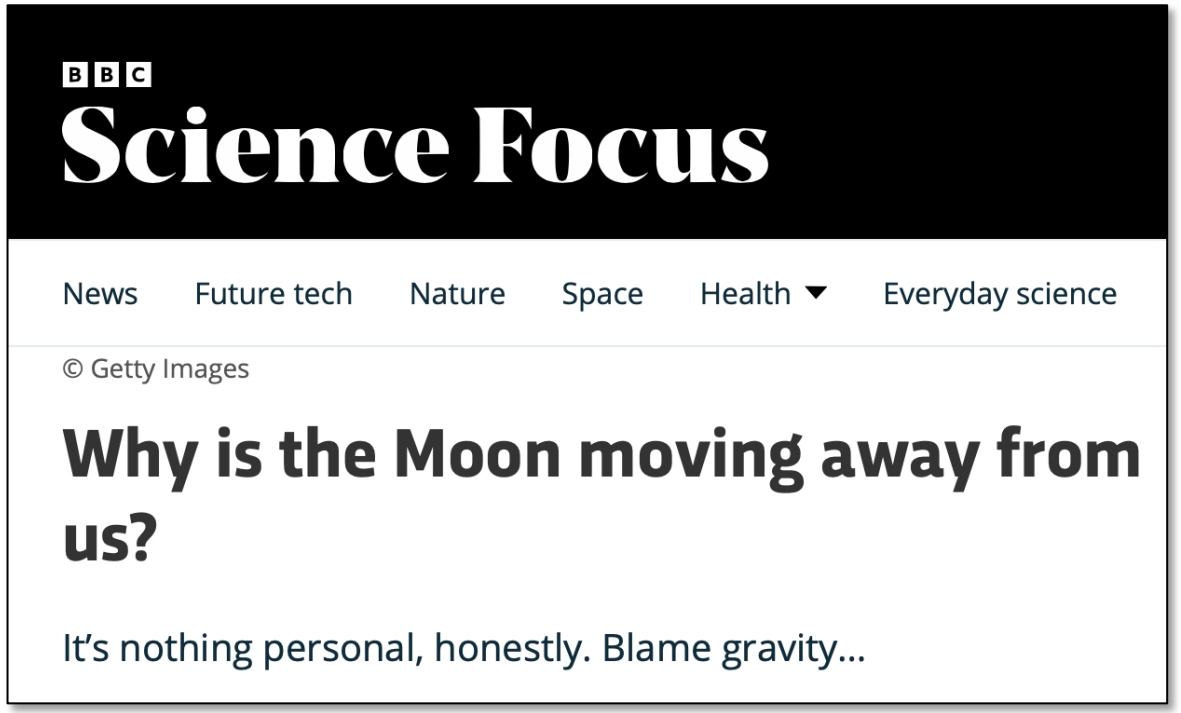
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 10: Flerpartikkelsystemer, rotasjons-bevegelse, stive legemer

(AMS 13, 14, 15.1-15.4)

Læringsmål: Finne ***massesenter til flerpartikkelsystemer*** og ***utstrakte legemer***. Definisjon av ***stivt legeme***, karakterisering av ***rotasjonsbevegelse***, ***vinkelhastighet***, ***vinkelakselerasjon*** for stive legemer. Bevaring av mekanisk energi for stive legemer: ***rotasjons-kinetisk energi***.

Beskjeder:

- ✓ Midtveisundersøkelse i Canvas, frist i dag 😊
- ✓ Oblig 3 frist på onsdag 2. april
- ✓ Ekstra notat på dekomponering av vektorer med praktiske eksempler er på vei!
- ✓ Nytt (og penere!) formelark fra Emilie er også på vei 😊

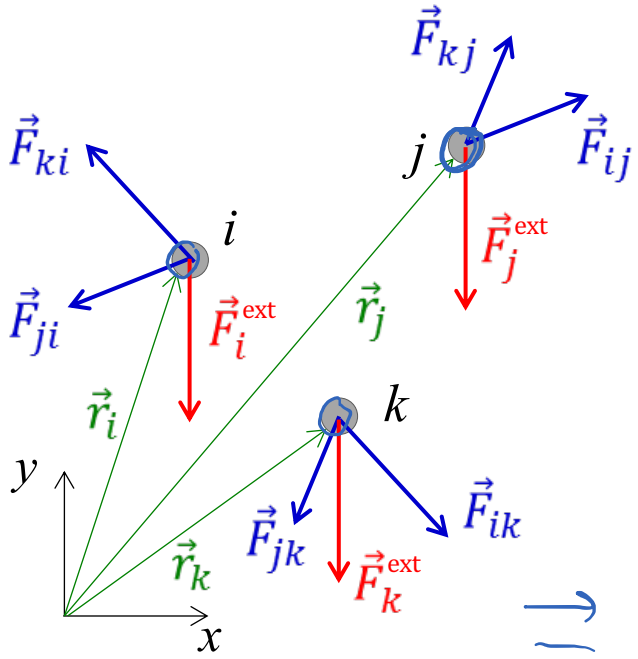


https://www.sciencefocus.com/space/why-is-the-moon-moving-away-from-us

Mandag 31.03.2025

Flerpartikkelsystemer 🔴🔵🟣

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



System: *N* partikler

Posisjon: $\vec{r}_i(t)$ Hastighet: $\vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

Bevegelsesmengde: $\vec{p}_i(t) = m_i\vec{v}_i(t)$

Ytre kraft på partikler: $\vec{F}_{i,ext}$

Indre kraft fra partikkel *j* på partikkel *i*: $\vec{F}_{ji}$

N3L: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Nettokraft på partikkel *i* (N2L): $\vec{F}_{i,net} = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$

For hele systemet: $\sum_i \vec{F}_{i,net} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d}{dt}\vec{P}$

kraft-motkraftpar

Bevegelsesmengde for hele systemet: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i$

N2L for *flerpartikkelsystemer*: $\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d}{dt}\vec{P}$

Massesenter for flerpartikkelsystemer 🔴🔵🟣

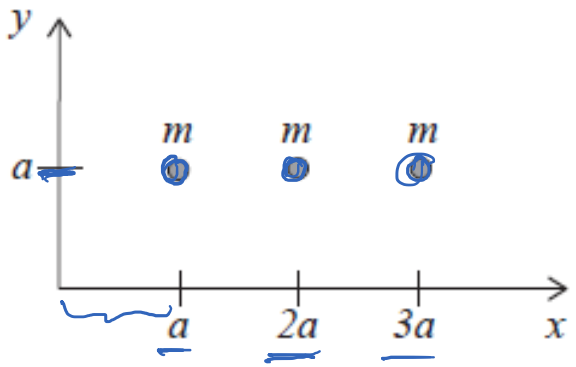
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Massesenter:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \,, \quad M = \sum_i m_i$$

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j}$$

Eksempel:



Vi finner massesenteret separat for *x*- og *y*-retning:

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{ma + m\cdot 2a + m3a}{3m} = 2a$$

$$Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{ma + ma + ma}{3m} = a$$

$$\vec{R} = 2a\hat{i} + a\hat{j}$$

Mentimeter Massesenteret til tre partikler

www.menti.com kode 7121 8769

Hva er massesenteret for dette systemet?

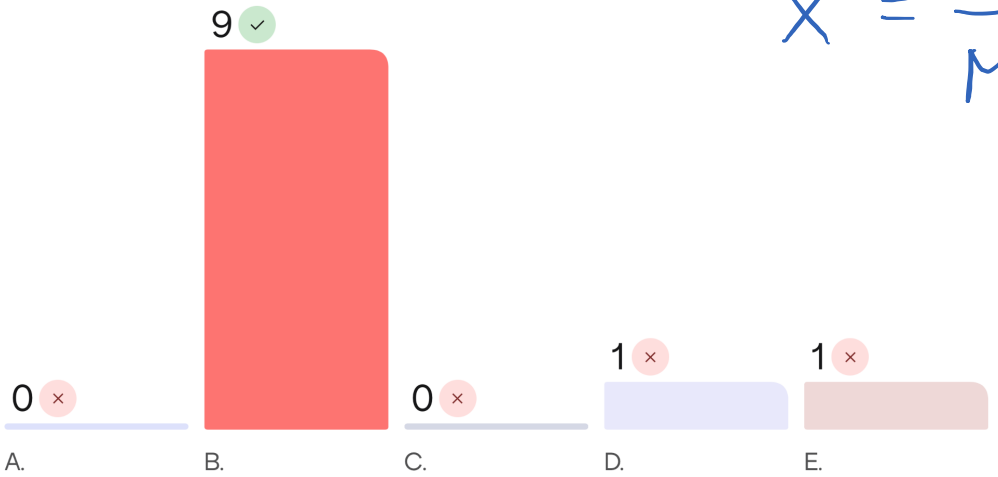
A. $x_{cm} = a$

B. $x_{cm} = \frac{3}{2}a$

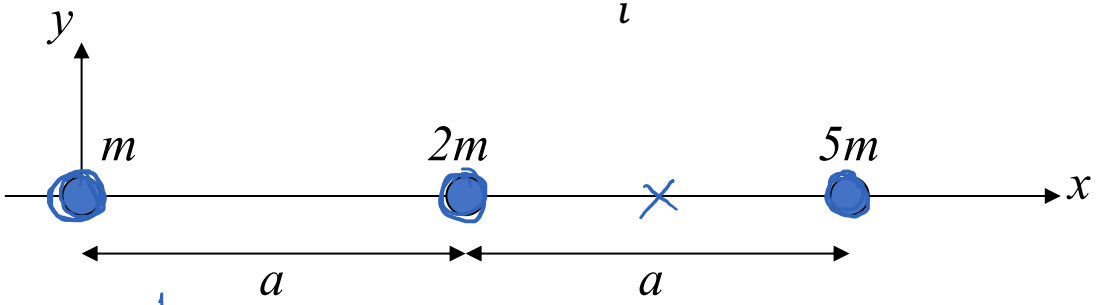
C. $x_{cm} = \frac{5}{4}a$

D. $x_{cm} = \frac{13}{8}a$

E. Vet ikke



Husk: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$



$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{0 + 2ma + 5m\,2a}{m + 2m + 5m}$$

$$= \frac{12}{8}a = \frac{3}{2}a$$

Svar: B 😎

Flerpartikkelsystemer, uttrykk 🔴🔵🟣

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

N2L: $\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Driv (bevegelsesmengde): $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}$

Masse: $M = \sum_i m_i$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$

Obs: $R \neq \sum_i \vec{r}_i$!!!

Hastighet: til massesenteret

$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$

Obs: $\vec{V} \neq \sum_i \vec{v}_i$!!

Akselerasjon: til massesenteret

$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$

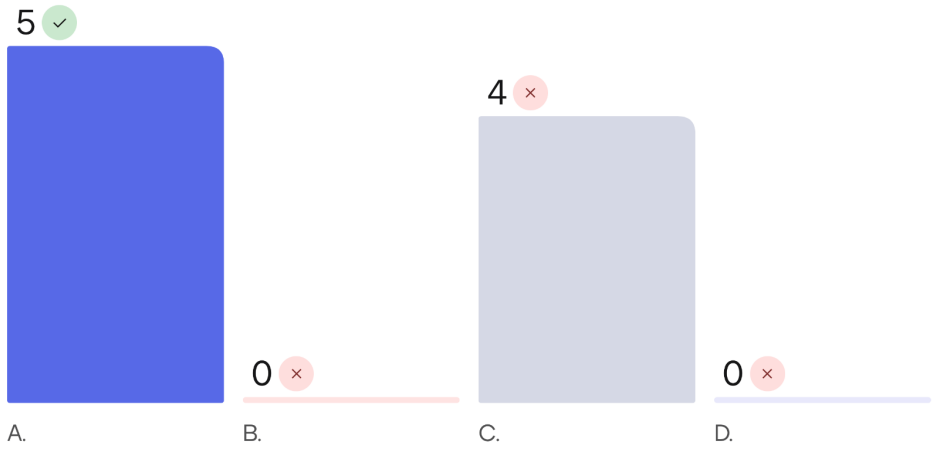
N2L for et flerpartikkelsystem: $\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{V}) = M\vec{A}$

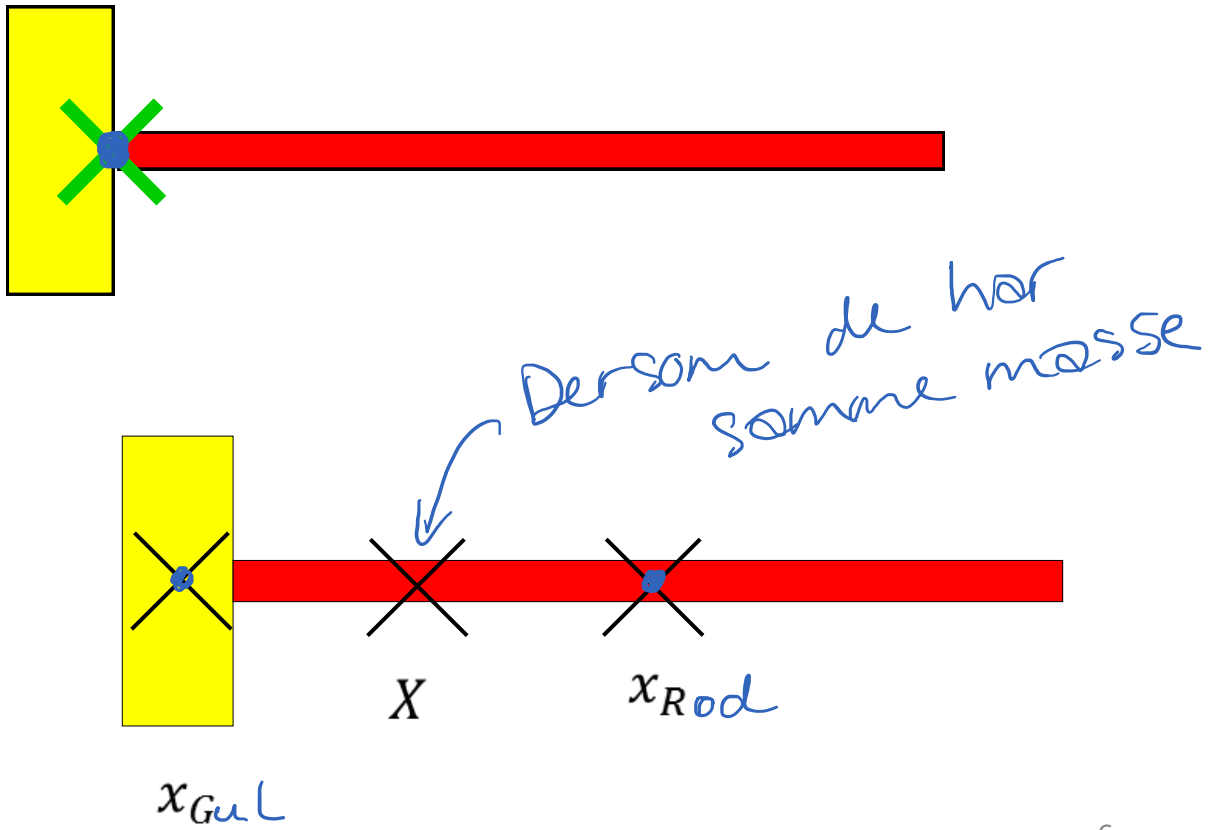
Mentimeter «Hammeren» 🔨

www.menti.com kode 7121 8769

Et gult og et rødt legeme er festet sammen. Hvert legeme har uniform tetthet. Massesenteret til det sammenkoblede legemet er markert med en grønn X. Hvilket legeme har størst masse?

A. Det gule
B. Det røde
C. De har samme masse
D. Ikke nok info til å avgjøre





Svar: A 😎

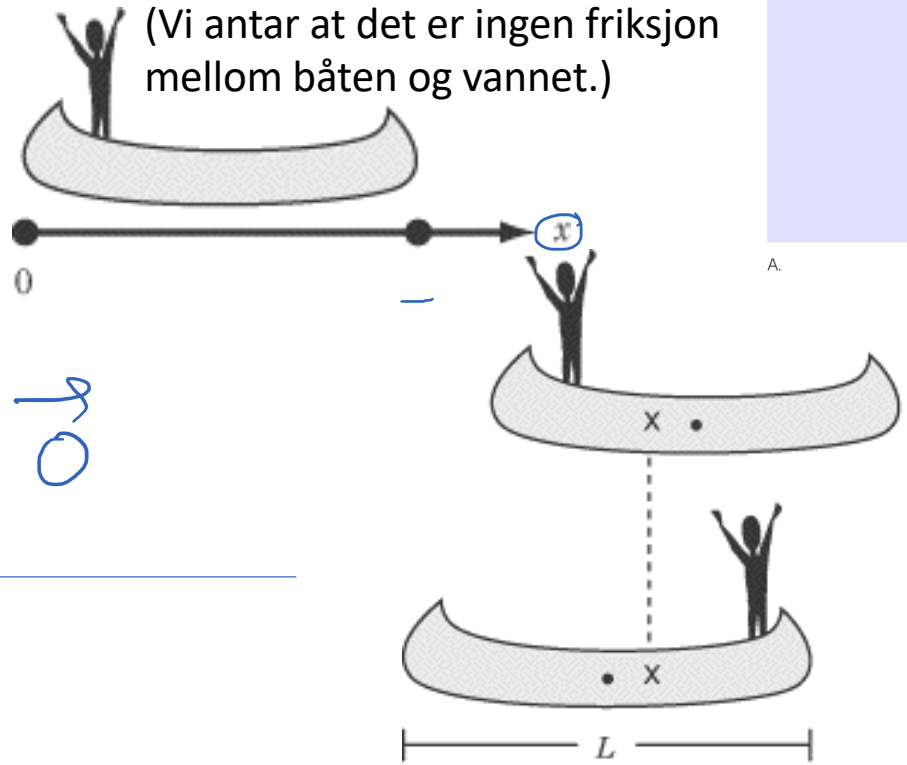
Mentimeter En person i en båt 🚣

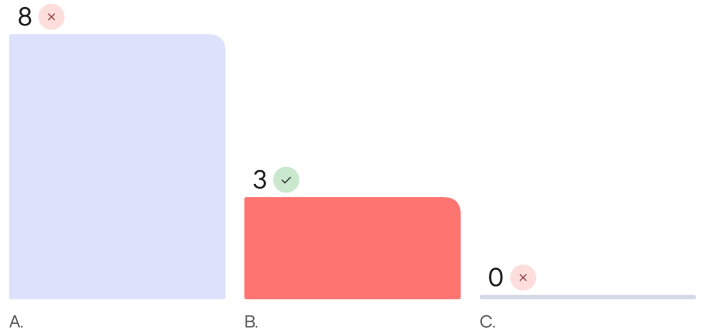
www.menti.com kode 7121 8769

Du sitter på stranden og ser på en person i en båt. Personen beveger seg fra den venstre enden av båten til den høyre. Du analyserer bevegelsen fra stranden og du finner at *massesenteret* til systemet som består av båt og person

A. beveger seg til høyre
B. forblir på samme sted
C. beveger seg til venstre

(Vi antar at det er ingen friksjon mellom båten og vannet.)





Ingen *ytre* nettokraft påvirker systemet

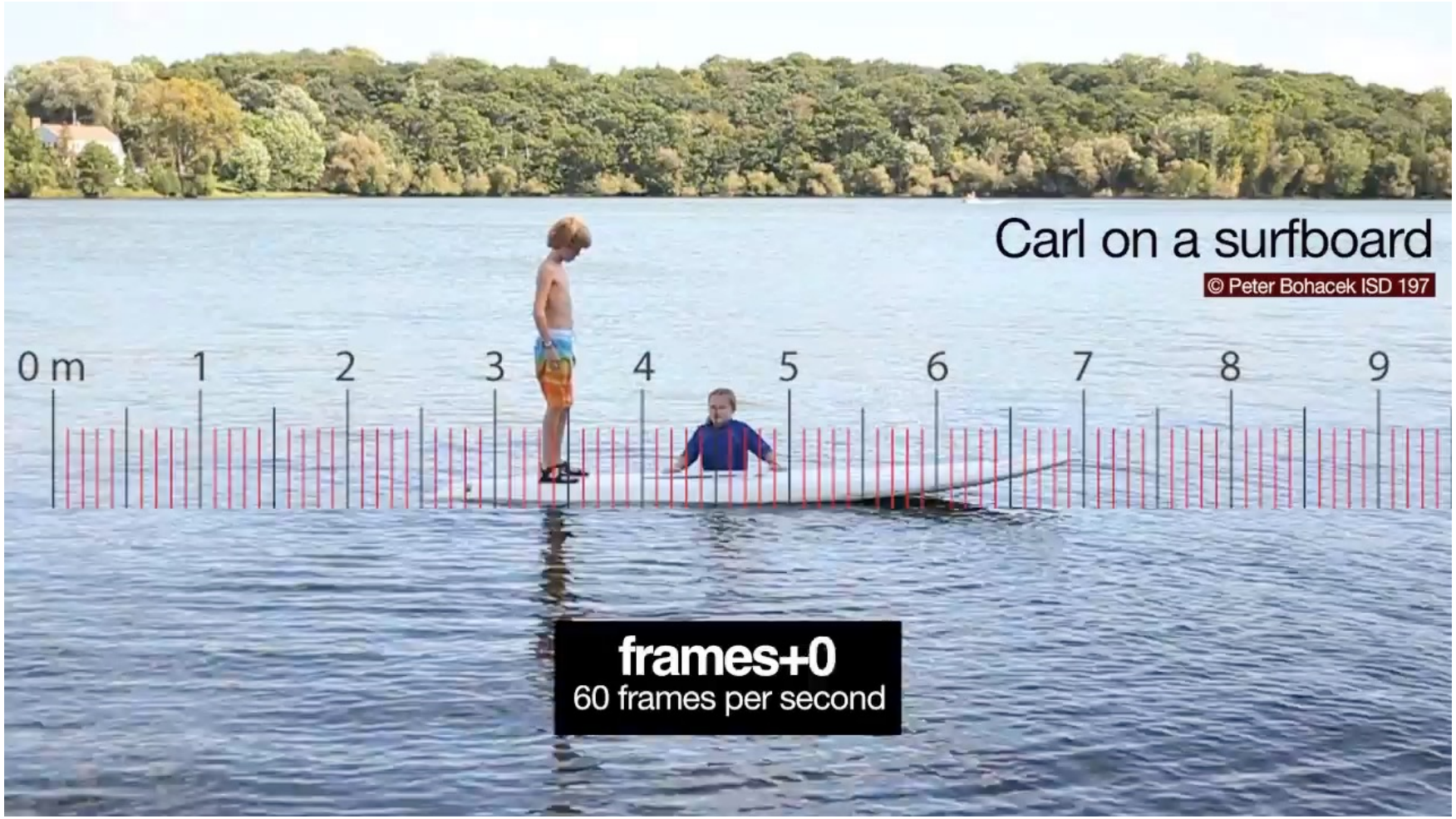
$$\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{A} = \vec{0}$$

Massesenteret forblir på samme sted!

Båten beveger seg til venstre
mens personen går til høyre

Svar B 😎

Carl på et surfebrett 🏄



https://serc.carleton.edu/details/files/63814.html

Bevaring av mekanisk energi i flerpartikkelsystemer

Konservative krefter $\Rightarrow E_{tot}$ er bevart:

$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{int}$$

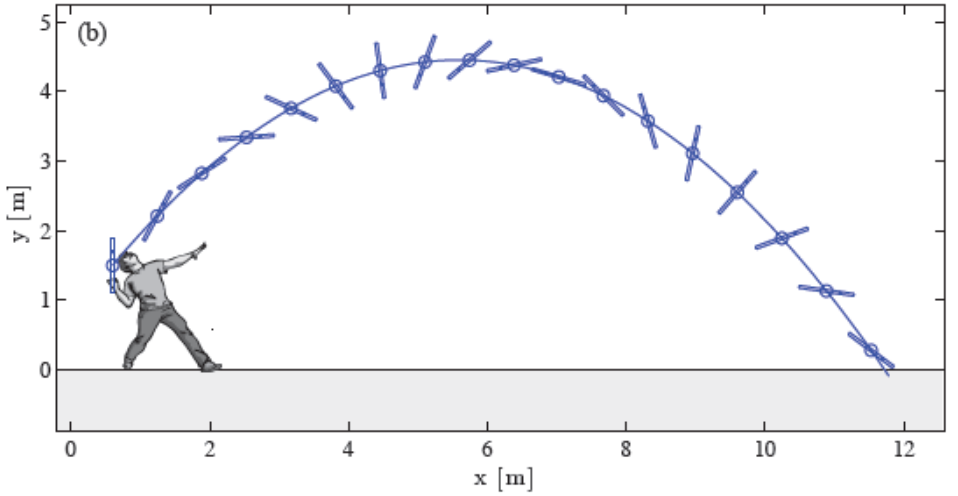
K_{cm} og U_{ext} er ofte relativt lette å bestemme,
men det kan være vanskelig å finne $K_{\Delta cm}$ og U_{int}

Energibevaring kan gi informasjon om indre kinetisk og potensiell energi:
hvor høyt spretter ballongen opp igjen? 🎈



Spesialtilfelle: **stivt legeme** 🤩 (U_{int} konst.)

- partiklene beveger seg *ikke* relativt til *hverandre*!
- partiklene kan bevege seg relativt til *massesenteret*
- bevegelsen beskrives ved translasjoner og rotasjoner
- *ingen* vibrasjoner eller deformasjoner (yay! 🙌)



Kaste en stav – takk til Leo og Georg! 😄 (og Marco🐶)





Eksempel: kaste en stav

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Ingen bevegelse relativt til massesenteret: $\vec{v}_{i,cm} = \vec{0}$

Kinetisk energi:

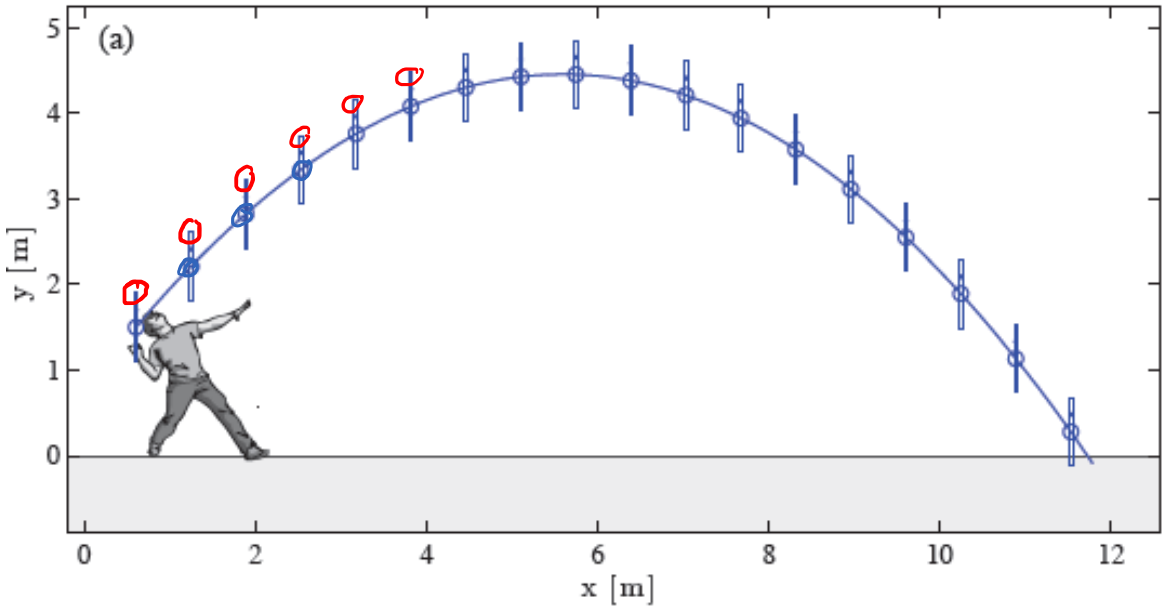
$$K = \frac{1}{2}MV^2$$

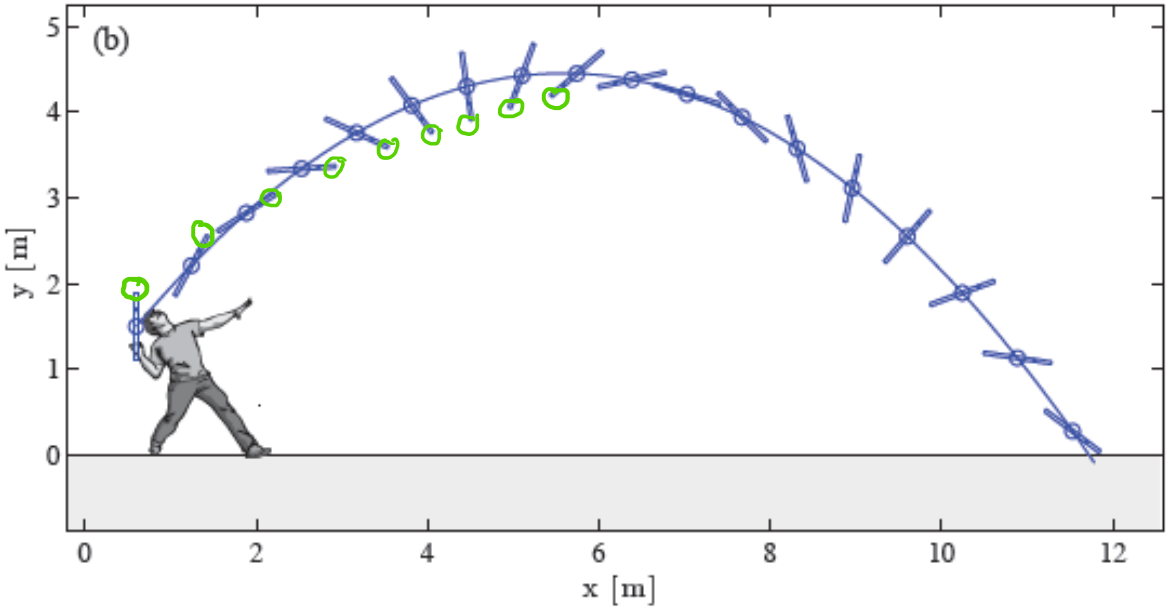
Bevegelse relativt til massesenteret: $\vec{v}_{i,cm} \neq \vec{0}$

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{i,cm}^2$$

Kinetisk energi, to bidrag:

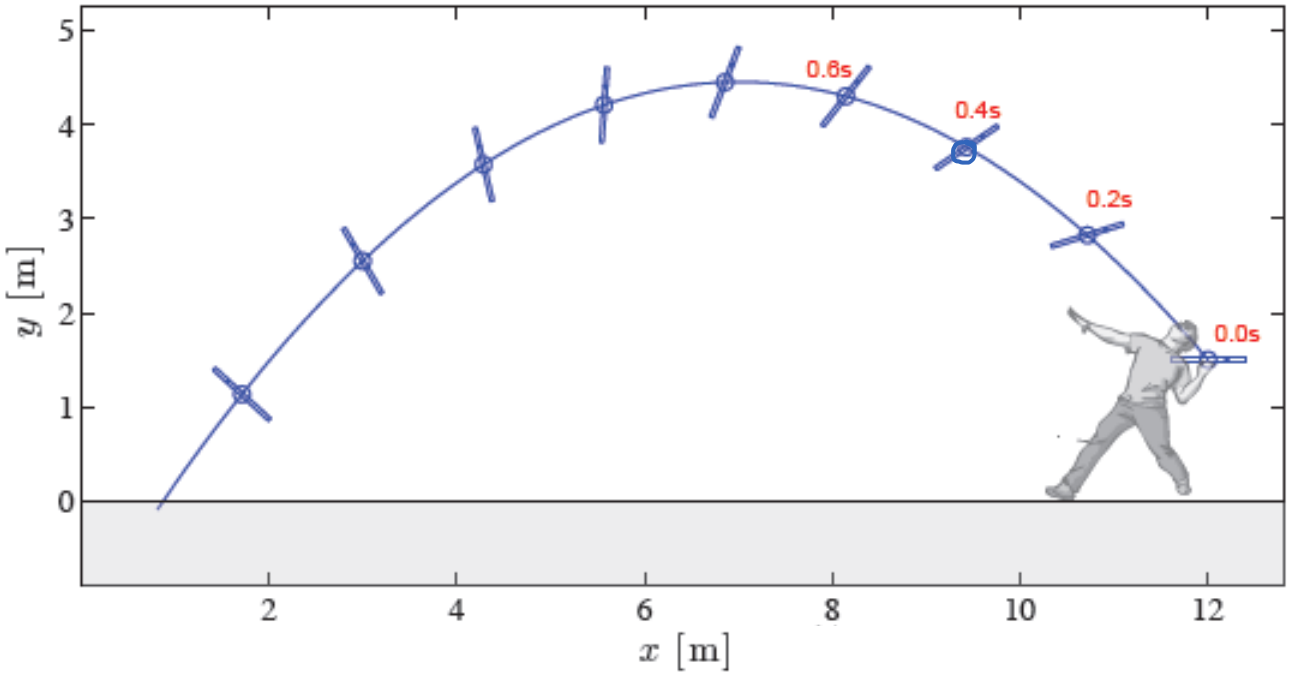
- i bevegelsen til massesenteret (parabelbane)
- i bevegelsen relativt til massesenteret (**rotasjon**)

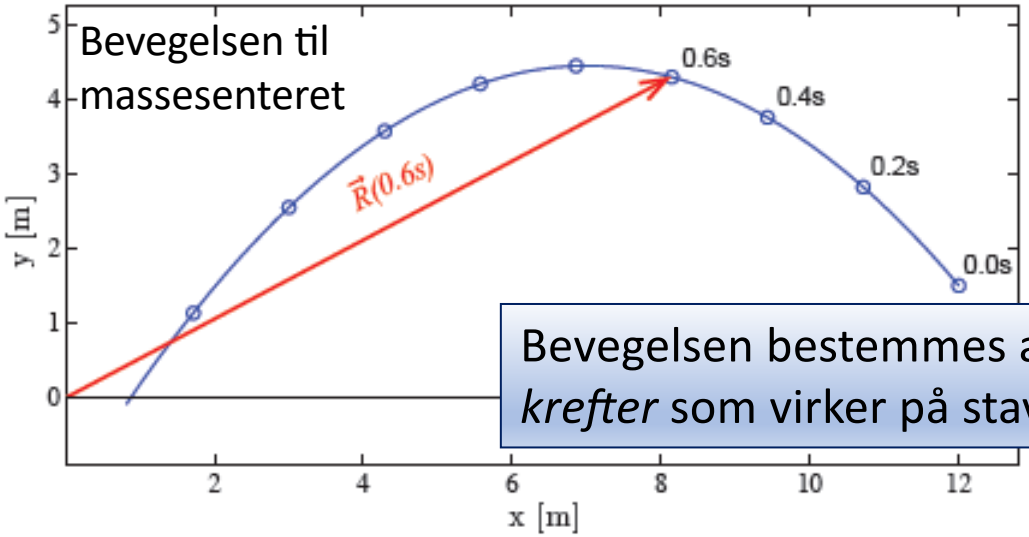




Hvis legemet *ikke* er stivt:
andre frihetsgrader for relativbevegelse, f.eks. vibrasjoner

Hvordan beskrive bevegelsen til et stivt legeme? 🤔



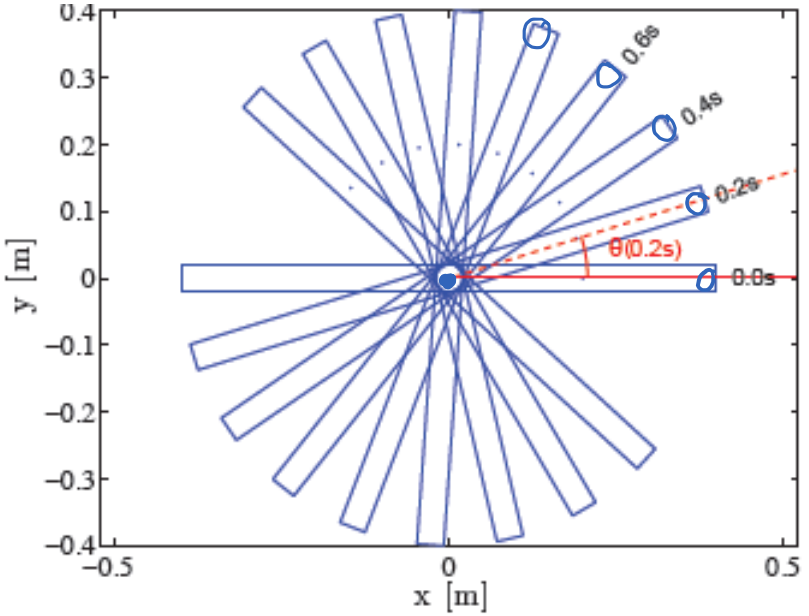


Bevegelsen bestemmes av *ytre krefter* som virker på staven

Vi separerer bevegelsen i:

- bevegelsen til massesenteret
- bevegelsen relativt til massesenteret

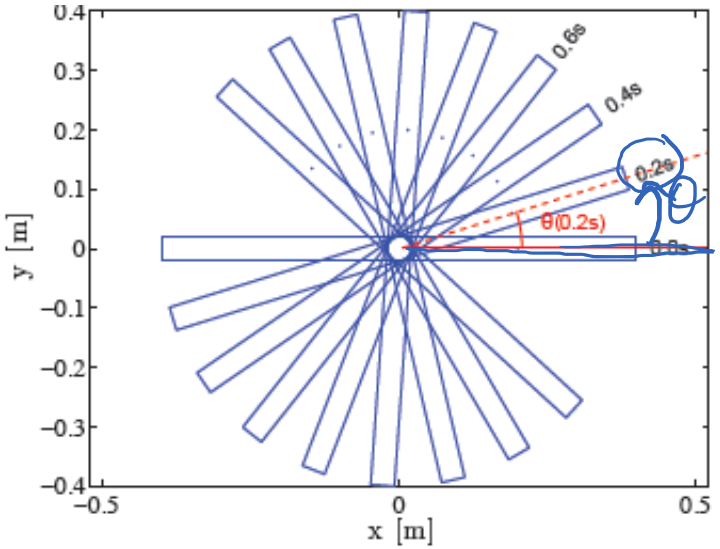
Bevegelsen relativt til massesenteret



Rotasjon om massesenteret til staven

Definisjon av vinkelfart og vinkelakselerasjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Konstant vinkelfart: $\omega = 1.5$ rad/s

Gjennomsnittlig vinkelfart:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

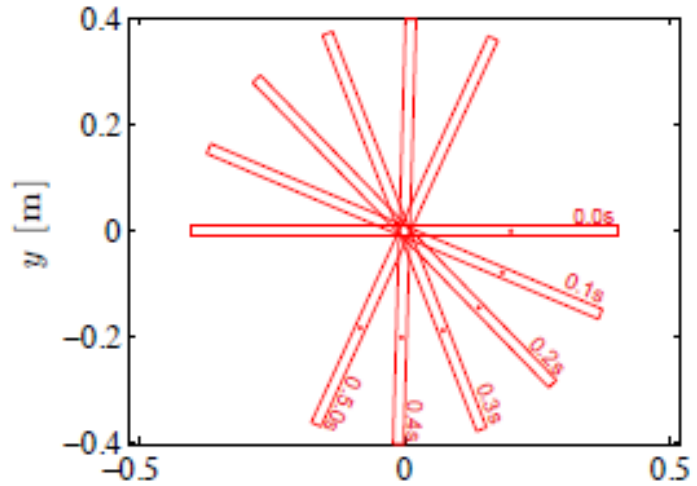
Momentan vinkelfart:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

ω trenger ikke være konstant!

(Momentan) vinkelakselerasjon:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Konstant vinkelfart: $\omega = -4.0$ rad/s

Translatorisk vs. rotasjonsbevegelse

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

	Translasjon	Rotasjon
Posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$
Hastighet	$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$
Akselerasjon	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Bevegelsesligninger for rotasjonsbevegelse med *konstant* vinkelakselerasjon: (står på formelark):

α = konstant:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Rotasjon, stivt legeme: treghetsmoment og kinetisk energi

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Husk: $v_i = \omega \rho_i$

Kvadrert fart til et punkt:

$$v_i^2 = (\omega r_i \sin\gamma)^2 = \omega^2 \rho_i^2$$

Kinetisk energi til et punkt:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2$$

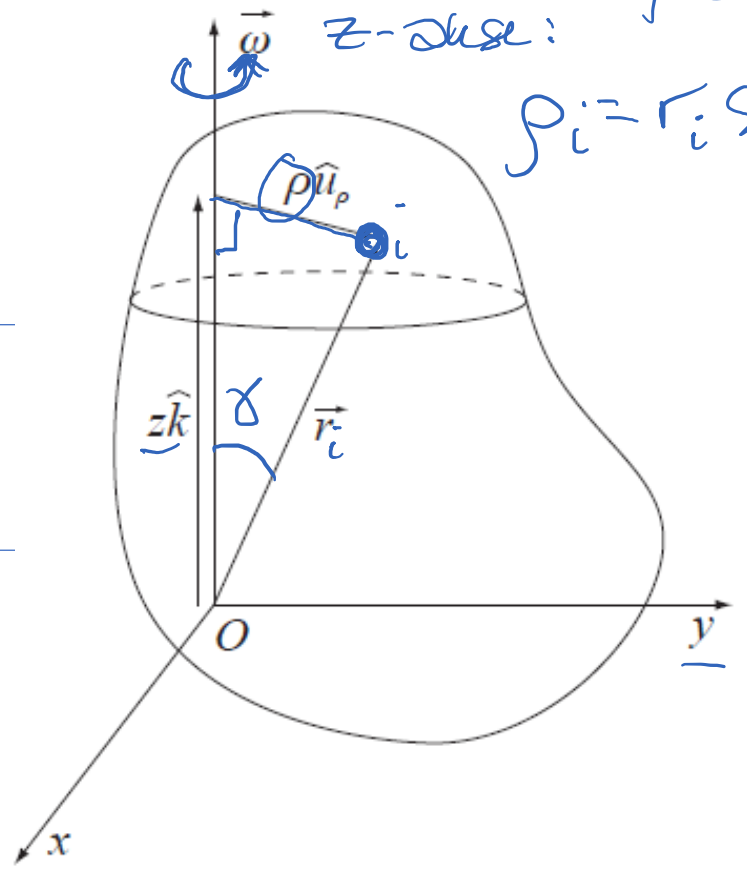
Kinetisk energi til *hele* legemet:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{\text{treghetsmoment}} = \frac{1}{2} \omega^2 I_z = K_{rot}$$

Jo *større* treghetsmoment, jo *mer energi* behøves for å få legemet til å rotere

Avstand fra z-akse: $\rho_i = r_i \sin\gamma$



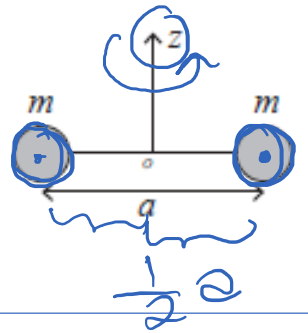
Treghetsmoment for legemet om aksen z: $I_z = \sum_i m_i p_i^2$

Lineærbevegelse: $K = \frac{1}{2} m v^2$

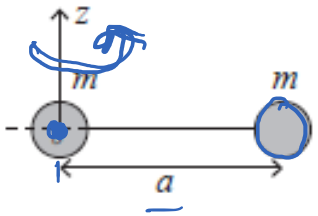
Eksempel: treghetsmoment til to partikler

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

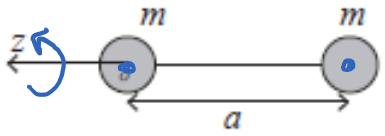
Vi antar at partiklene kan beskrives som punktpartikler og at forbindelsen mellom den er masseløs



$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 = m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \underline{\frac{1}{2}ma^2}$$



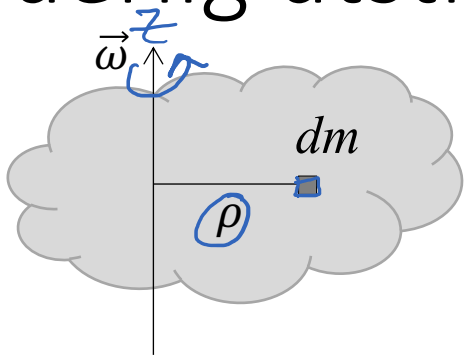
$$I_z = m(0)^2 + ma^2 = \underline{ma^2}$$



$$I_z = 0\ !$$

Rotasjon av et stivt legeme med kontinuerlig utstrekning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Kontinuerlig legeme med massetetthet $\rho_m(\vec{r})$

som roterer med vinkelhastighet ω om z-aksen: $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

Et volumelement dV har masse $dm = \rho_m(\vec{r})dV$

med en avstand ρ fra rotasjonsaksen

Kinetisk energi til volumelementet:

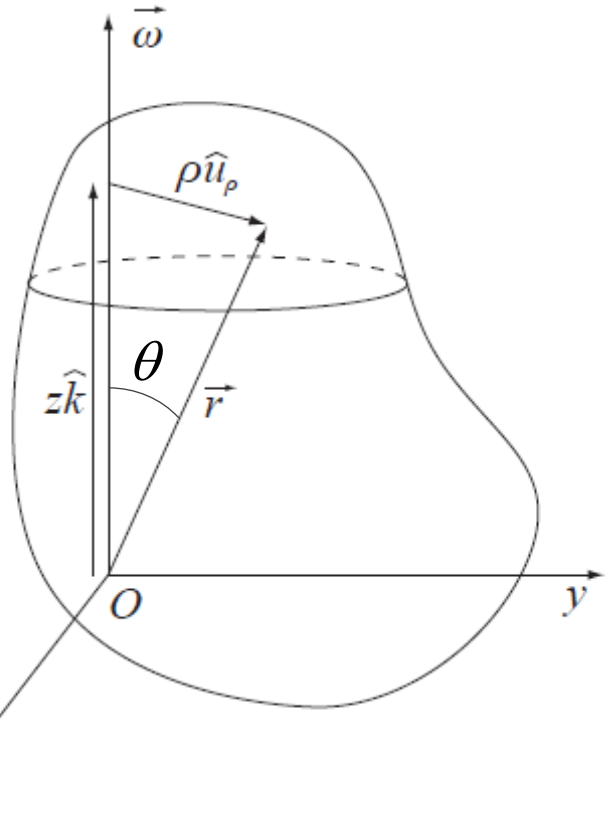
$$dK = \frac{1}{2}dm\,v^2 = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})\,dV$$

Kinetisk energi til hele legemet:

$$K = \int_V \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$I_z = \sum_i m_i\rho_i^2 \longrightarrow I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$



Treghetsmoment til et *utstrakt* legeme: $I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$

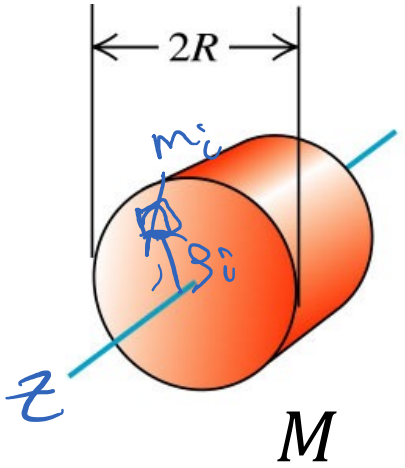
Mentimeter En sylinder og et sylinderskall

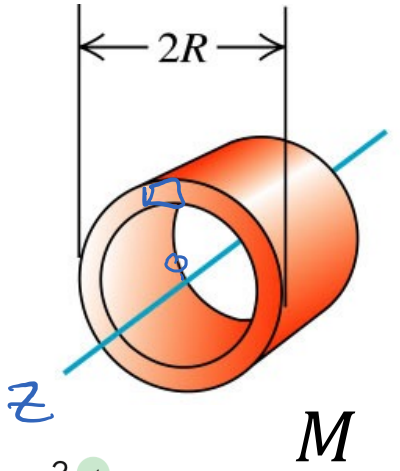
www.menti.com kode 7121 8769

Legemene er homogene og har samme masse M og ytre dimensjoner.
Hvilket legeme har *minst* treghetsmoment om den viste aksen?

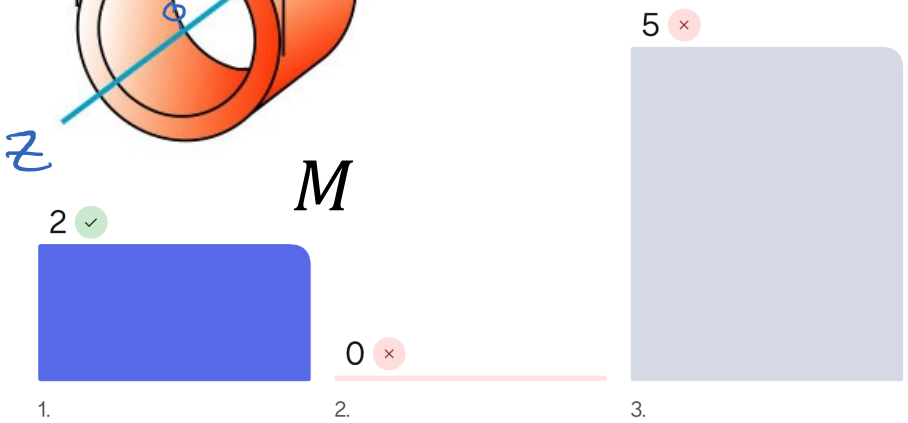
1. sylinderen
2. sylinderskallet
3. treghetsmomentet er det samme

Svar 1 😎





$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$$



Den totale massen er den samme: $M \approx \sum_i m_i$

Men *avstanden* massepunktene har fra rotasjonsaksen er gjennomsnittlig større for sylinderskallet:

$$I_z = \int_M \rho^2 dm \approx \sum_i m_i \rho_i^2$$

Takk for i dag! 😀