FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 11: Rullebetingelsen, kraftmoment, Newtons 2. lov for rotasjoner
(AMS 15.5, 16.1, 16.2)

Læringsmål: Vite hva ***rullebetingelsen*** er og bruke den.
Definisjon på ***kraftmoment*** og hvordan det regnes ut,
Newtons 2. lov for rotasjoner.



Beskjeder:

- ✓ Oblig 4 legges ut i kveld, frist 25.april. Dette blir den siste obligen 😊
- ✓ Eksperiment 2 etter påske, tidspunkt på legges ut på Canvas
- ✓ Uka etter påske: forelesning på tirsdag, ikke seminartime (mandagen er 2. påskedag)

Mandag 07.04.2025

Litt repetisjon fra forrige uke 😄

Treghetsmoment og kinetisk energi

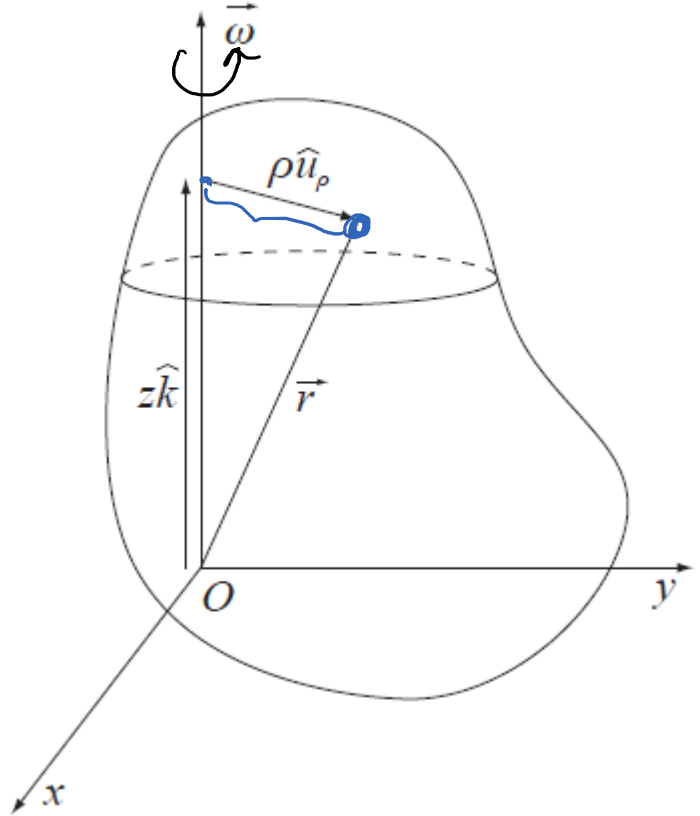
Treghetsmoment for legemet om *z*-aksen: $I_z = \sum_i m_i p_i^2$

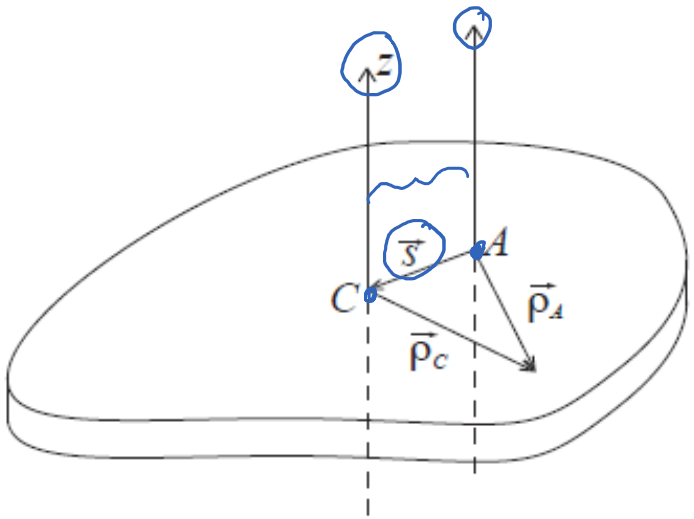
Treghetsmoment til et legeme med kontinuerlig utstrekning:

$$I_z = \int_V \rho^2 \rho_m(\vec{r}) dV$$

Kinetisk energi pga. rotasjon: $K_{rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Jo *større* treghetsmoment, jo *mer energi* behøves for å få legemet til å rotere



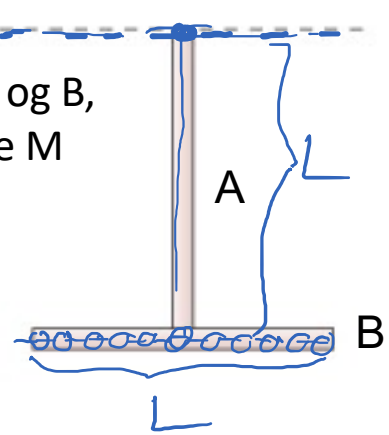


Parallellakseteoremet: $I_A = I_C + Ms^2$

Superposisjonsprinsipp

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Hva er treghetsmomentet til et legeme som består av to deler? 🤔



To like staver A og B, lengde L, masse M

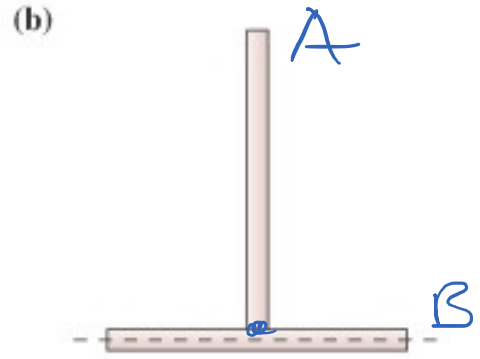
$I_{a,A} = \frac{1}{3}ML^2$

$I_{a,B} = ML^2$

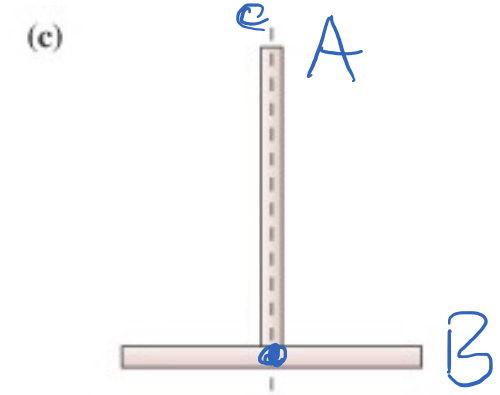
$$I_a = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} m_i \rho_i^2}_{\text{stav A}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{N} m_i \rho_i^2}_{\text{stav B}} = I_{a,A} + I_{a,B}$$

Til sammen:

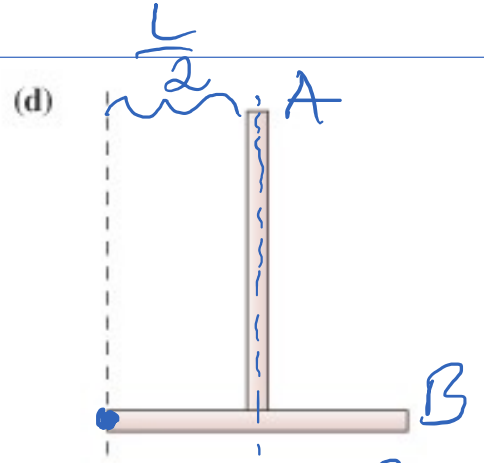
$$\Rightarrow I_a = \frac{1}{3}ML^2 + ML^2 = \frac{4}{3}ML^2$$



$$I_b = \underbrace{\frac{1}{3}ML^2}_{\text{stav A}}$$



$$I_c = \underbrace{\frac{1}{12}ML^2}_{\text{stav B}}$$



$$I_d = \underbrace{M\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{stav A}} + \underbrace{\frac{1}{3}ML^2}_{\text{stav B}} = \frac{7}{12}ML^2$$

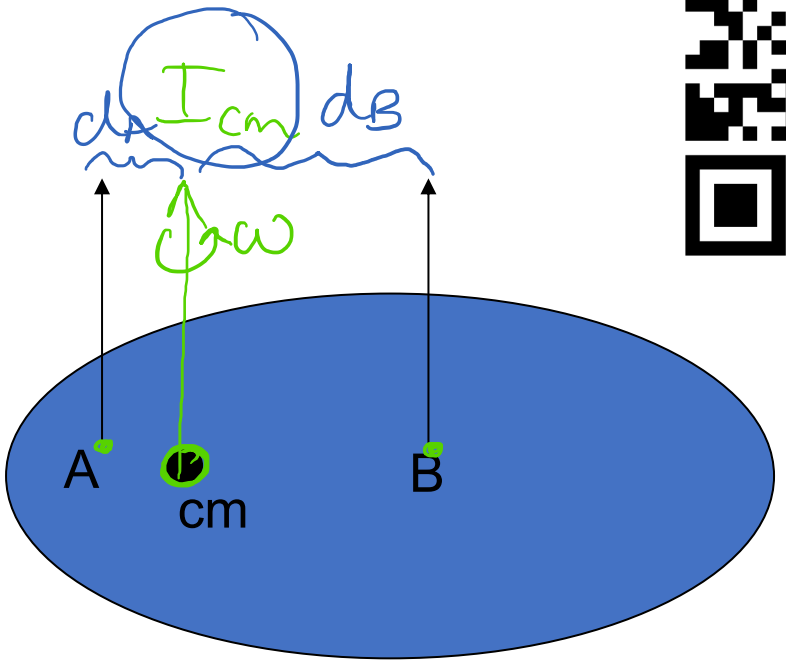
Mentimeter Treghetsmoment om to akser

www.menti.com kode 3691 8461

Hvor stort er treghetsmomentet om A sammenliknet med treghetsmomentet om B?

1. $I_A > I_B$
2. $I_A = I_B$
3. $I_A < I_B$

Svar 3 😎

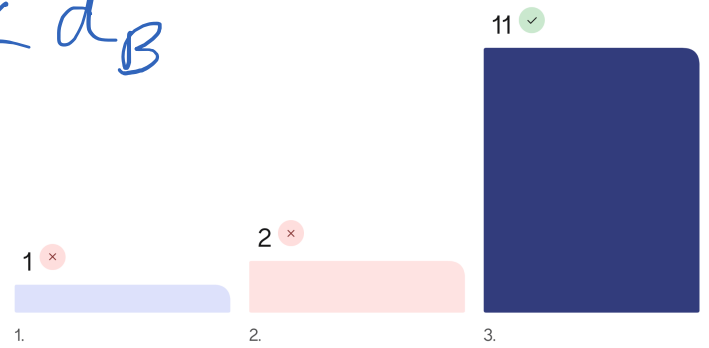


Vi bruker parallellakseteoremet:

$$I_A = I_{cm} + M d_A^2$$
$$I_B = I_{cm} + M d_B^2$$

Siden at $d_A < d_B$

$\Rightarrow I_A < I_B$



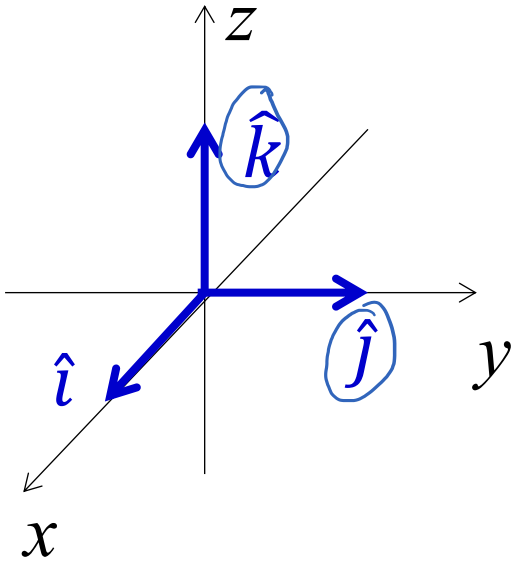
Mentimeter Kryssprodukt av enhetsvektorer

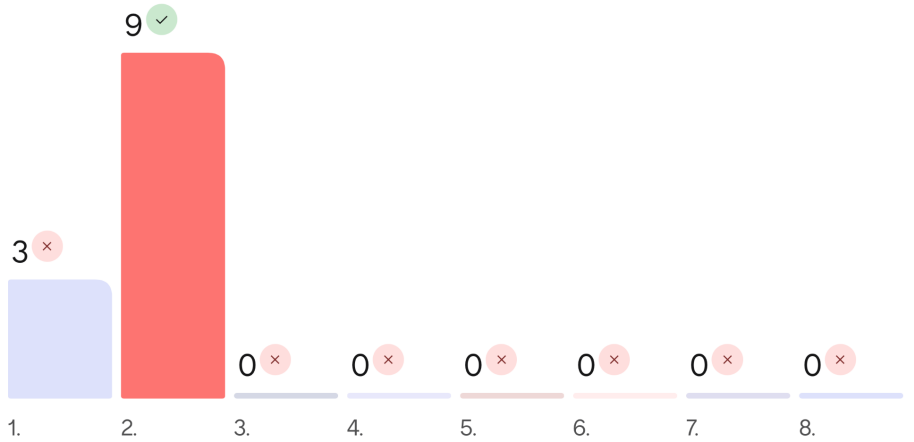
www.menti.com kode 3691 8461

Vi har et høyrehendt koordinatsystem med enhetsvektorer $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, og $\hat{k}$. Vektor(kryss)-produktet $\hat{k}\times\hat{\jmath}$ er lik:

Svar 2 😎

1. $\hat{\imath}$
2. $-\hat{\imath}$
3. $\hat{\jmath}$
4. $-\hat{\jmath}$
5. $\hat{k}$
6. $-\hat{k}$
7. $\vec{0}$
8. $\vec{1}$





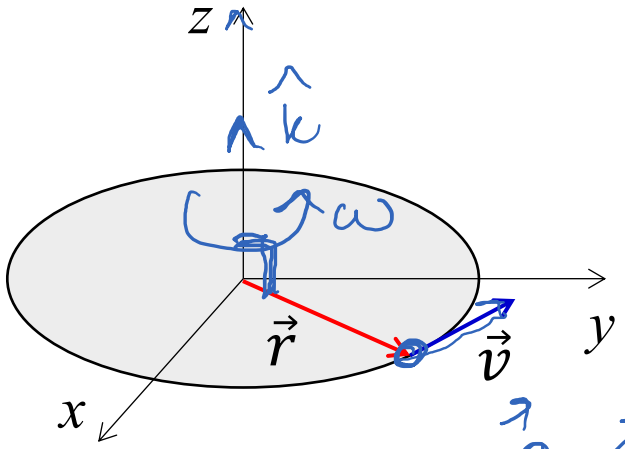
$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k} \qquad \hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath} \qquad \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath}$$
$$\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath} \qquad \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath}$$

Rotasjoner i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi velger et koordinatsystem:

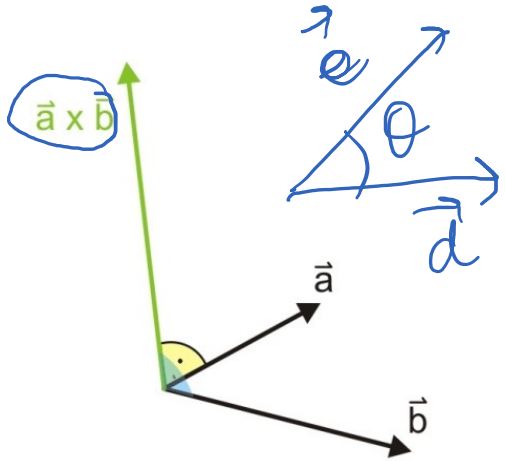
- z-aksen er rotasjonsaksen
- rotasjon i x-y-planet



Et punkt i avstand $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ fra rotasjonsaksen beveger seg på en sirkelbane med fart $v = \omega r$

Hastigheten er i tangentiell retning: $\vec{v} \perp \vec{r}$, $\vec{v} \perp \hat{k}$

Dermed kan vi skrive: $\vec{v} = \omega \hat{k} \times \vec{r}$

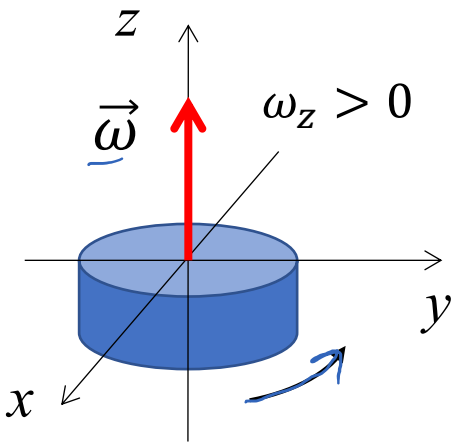


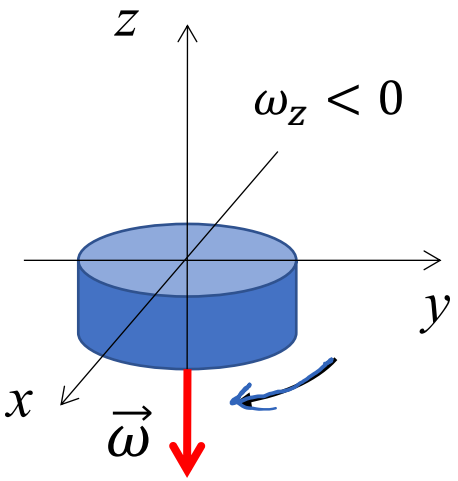
Vi kan definere vinkelhastighet som en *vektor*:

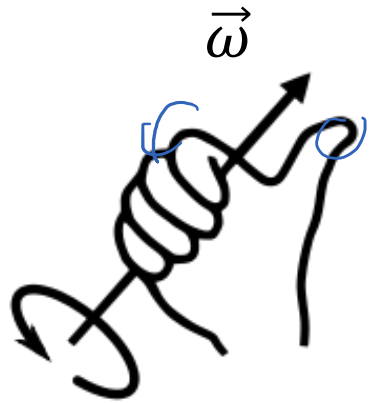
$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\theta = \omega r$, $\sin\theta = 1$

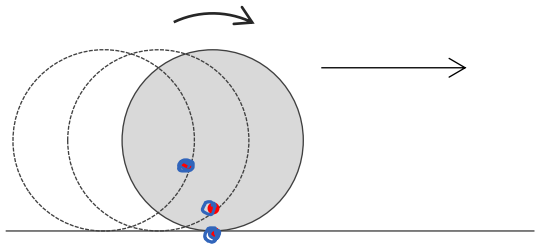


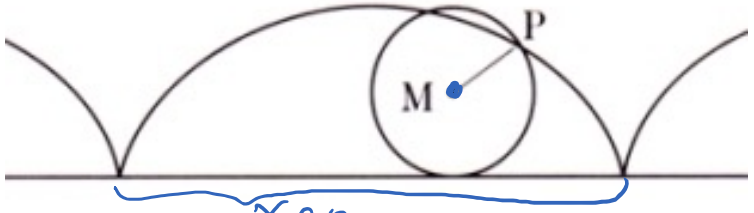


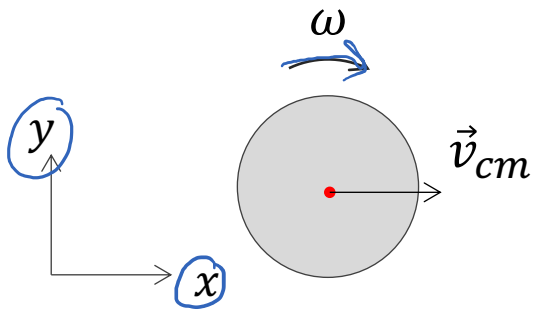


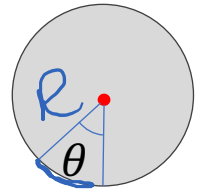
Rullebetingelsen: rulle uten å gli

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]









Bue lengde

Hjul med radius *R*. Massesenteret: $\vec{v}_{cm}$, og i tillegg roterer hjulet med vinkelfart ω.

Når hjulet har rotert én omdreining, hvor langt har massesenteret flyttet seg i *x*-retning?

Omkretsen til hjulet: $x_{cm} = 2\pi R$

For en *delvis* omdreining, hvor langt har massesenteret flyttet seg i *x*-retning?

Rullebetingelsen

Buelengden: $x_{cm} = R\theta$

Deriverer mhp tid: $\boxed{v_{cm} = \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\omega}$

Deriverer en gang til: $a_{cm} = \frac{d^2x_{cm}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\alpha$

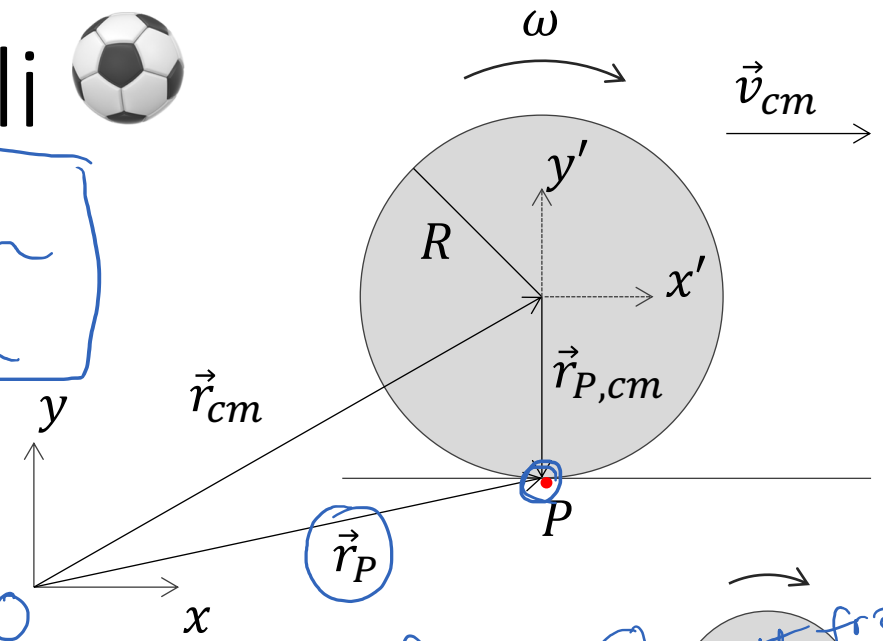
Rullebetingelsen: rulle uten å gli



[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{P,cm}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm}$$

Punktet *P* beveger seg på en sirkelbane i massesentersystemet:

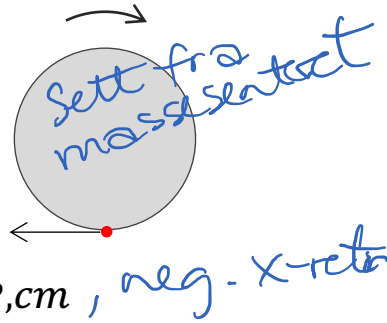


Kontaktpunktet med bakken:

$$\vec{v}_{P,cm} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P,cm}$$
$$= (\omega\hat{k}) \times (-R\hat{j}) = \omega R(\hat{k} \times \hat{j})$$
$$= -\omega R\,\hat{i}$$

↑ kryssprodukt fra mentimeter-opg. 😊

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm} = \vec{v}_{cm} - \omega R\,\hat{i}$$



Rullebevegelse i *laboratoriesystemet* (vi står i ro og ser ballen trille forbi).

P bytter vertikal bevegelsesretning når det treffer bakken (fra - til + i *y*-retn.): $\Rightarrow v_{P,y} = 0$

Hvis legemet ruller *uten å skli* så er hastigheten til *kontaktpunktet*: $\Rightarrow v_{P,x} = 0$

Rullebetingelsen:

$\vec{v}_P = \vec{0}$ (momentant i ro) (i lab.system) $\Rightarrow$

$$\vec{v}_{cm} = +\omega R\,\hat{i}$$

Eksempel: spinne et hjul

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Tangentiell kraft F_T i avstand R fra aksen

Kraften virker over et *kort* tidsintervall Δt
langs en *kort* strekning $\Delta s = R\Delta\theta$

Arbeid: $W \approx F_T \Delta s = F_T R \Delta\theta = K_1 - K_0 \mid \cdot \frac{1}{\Delta t}$

($K_1 = K(t+\Delta t)$, $K_0 = K(t)$)

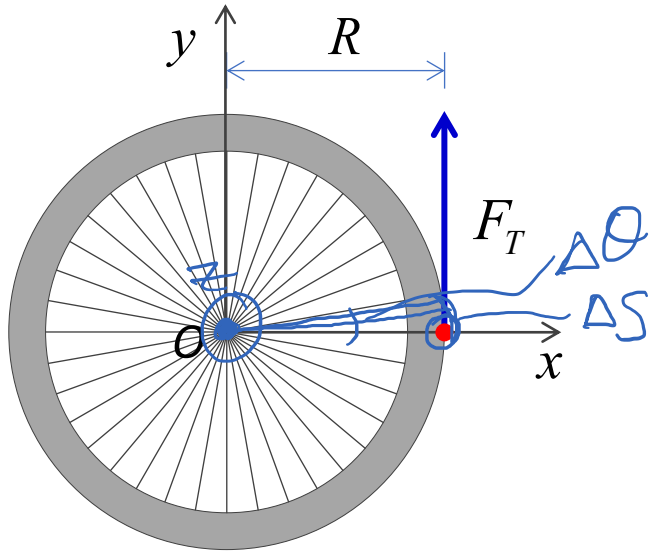
$$F_T R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$:

$$F_T R \frac{d\theta}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right) = \frac{1}{2} I_0 \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow F_T R \omega = I_0 \omega \alpha, \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha, \text{ vinkulokks.}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_T R = I_0 \alpha}$$



Kinetisk energi:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

N2L for rotasjonsbevegelse:

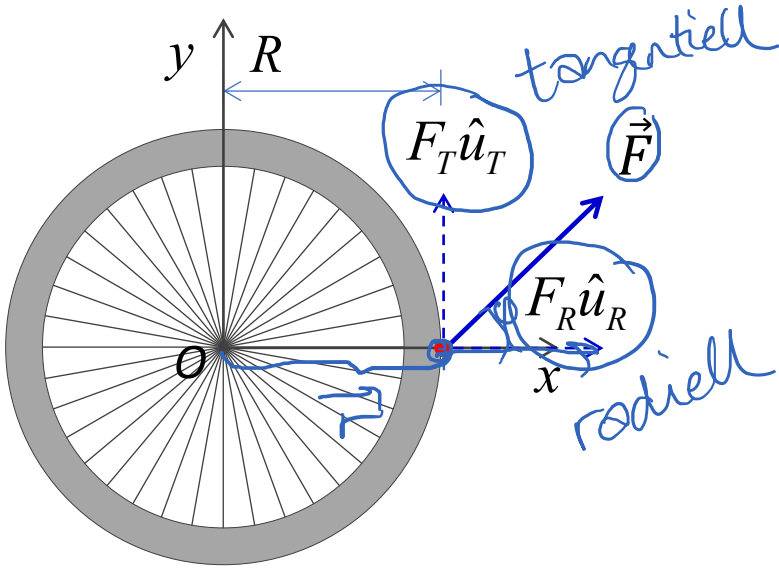
$$F_T R = I_O \alpha$$

N2L for translasjonsbevegelse:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Kraftmoment («torque») 💪

Bare den *tangentielle* kraftkomponenten bidrar til å spinne hjulet



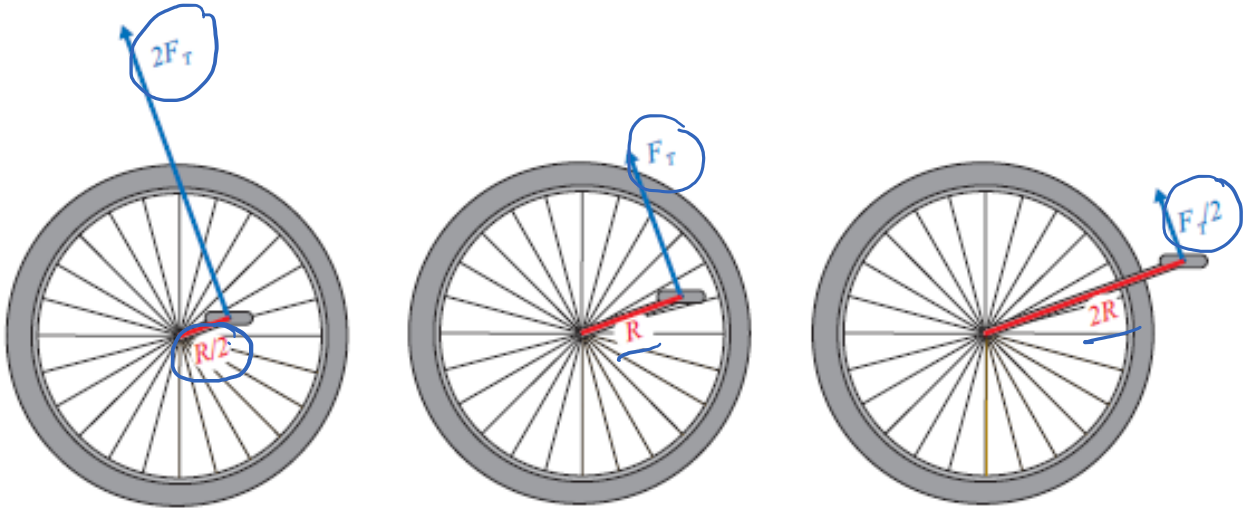
Newtons 2. lov for rotasjoner (stivt legeme om en fast akse):
Én kraft: $F_T R = I_O \alpha$; Flere krefter: $\sum \tau_O = I_O \alpha$

$\tau_O = F_T R$, $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ **_Kraftmoment_**

«kraftarm × kraft»:
$\vec{r}$ er vektoren fra *O* til punktet hvor kraften angriper

Kraftmomentet er *årsak* til vinkelakselerasjonen: $\boldsymbol{\tau_O = I_O \alpha}$

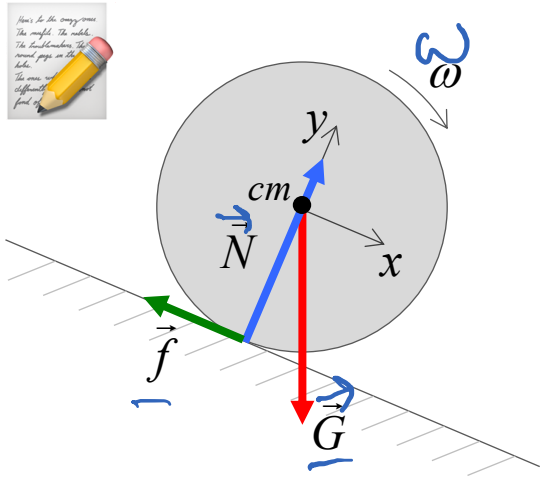
Avstanden *R* fra rotasjonsaksen gjennom *O* er viktig:



Treghetsmomentet angir *legemets motstand mot å få rotasjonshastigheten (vinkelhastigheten) endret.*

💪 Det kreves et ***kraftmoment*** for å endre rotasjonshastigheten.

Oppdatert problemløsningsoppskrift



- Identifiser *system* og *omgivelser*
- Definer et koordinatsystem
- Finn massesenteret, rotasjonsaksen og treghetsmomentet
- Finn initialbetingelsene: posisjon, hastighet, vinkel, vinkelhastighet
- Finn kreftene og angrepspunktene deres
- Finn kraftmomentene for hver kraft
- Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen til massesenteret: $\sum_i \vec{F}_{ext,i} = M\vec{A}$
- Bruk Newtons andre lov for rotasjoner for å finne vinkelakselerasjonen: $\sum_i \tau_{z,i} = I_z\alpha$
- *Hvis gyldig*, bruk rullebetingelsen for å relatere translasjon og rotasjon
- Løs bevegelsesligningene for translasjon og rotasjon
- Analyser bevegelsen, sjekk at løsningen er fornuftig 👍

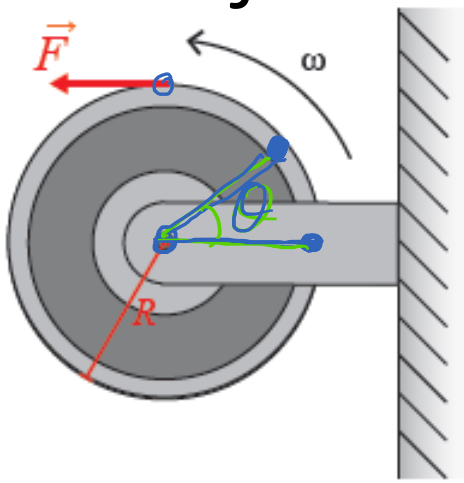
Eksempel: kraftmoment på et hjul

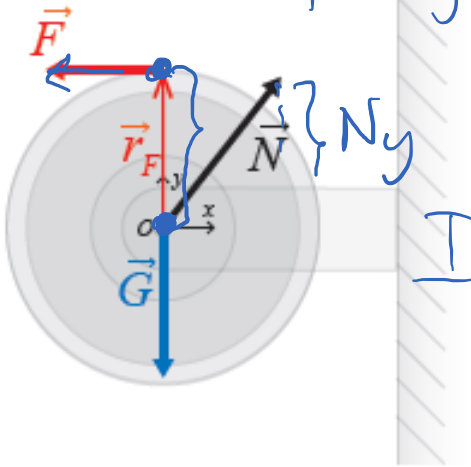
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Ser bort fra luftmotstand og friksjon

En konstant kraft $\vec{F}$ virker tangentielt på et hjul (homogen sylinder). Finn vinkelen θ som funksjon av tiden.

Starter i ro, $\omega_0 = 0\ \text{rad/s}$, $\theta_0 = 0\ \text{rad}$





$I_z = \frac{1}{2}mR^2$

Krefter:

- gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{j}$
- konstant kraft: $\vec{F} = -F\hat{i}$
- normalkraften fra aksen på hjulet: $\vec{N}$

Massesenteret beveger seg ikke:

N2L: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{N} = -\vec{G} - \vec{F} = \underline{F\hat{i} + mg\hat{j}}$

Om z-aksen (massesenteret)

Kraftmoment: $\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = \vec{0} \times \vec{G} = \vec{0}$

$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = \vec{0} \times \vec{N} = \vec{0}$

$\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = R\hat{j} \times (-F\hat{i}) = \underline{RF\hat{k}}$

N2LR: $\sum \tau_z = \tau_F = I_z \alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\tau_F}{I_z} = \frac{FR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2F}{MR} = \text{konst.}$

Vinkelen (bev. lign. for konst α)

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ($\theta_0 = 0\ \text{rad}$, $\omega_0 = 0\ \text{rad/s}$)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2F}{MR} t^2 = \frac{F}{MR} t^2$

Takk for i dag! 😀