FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 11: Rullebetingelsen, kraftmoment, Newtos 2. lov for rotasjoner

(AMS 15.5, 16.1, 16.2)

Læringsmål: Vite hva ***rullebetingelsen*** er og bruke den.
Definisjon på ***kraftmoment*** og hvordan det regnes ut,
Newtons 2. lov for rotasjoner.

Beskjeder:

✓ …

Mandag 07.04.2025

Litt repetisjon fra forrige uke 😄

Treghetsmoment og kinetisk energi

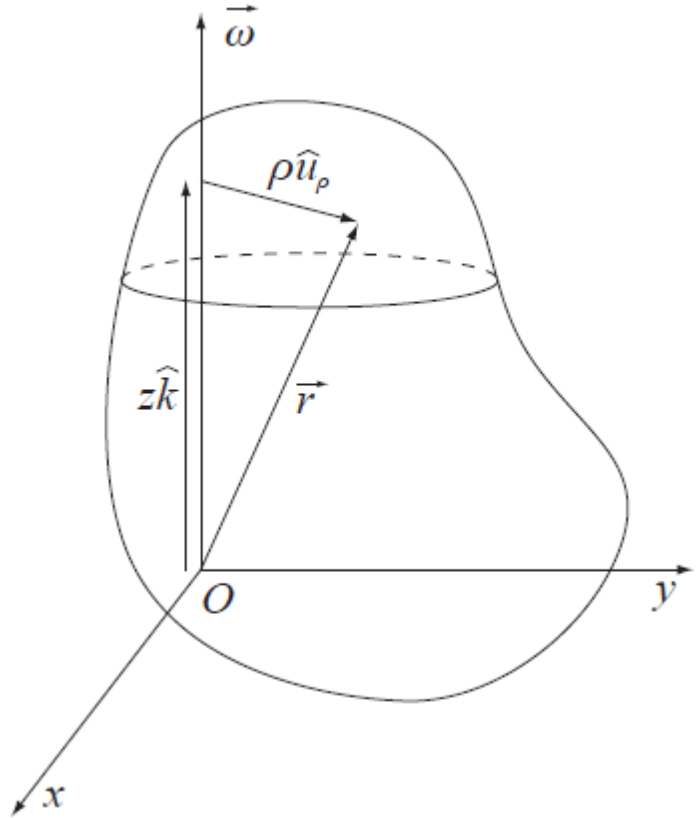
Treghetsmoment for legemet om *z*-aksen: $I_z = \sum_i m_i p_i^2$

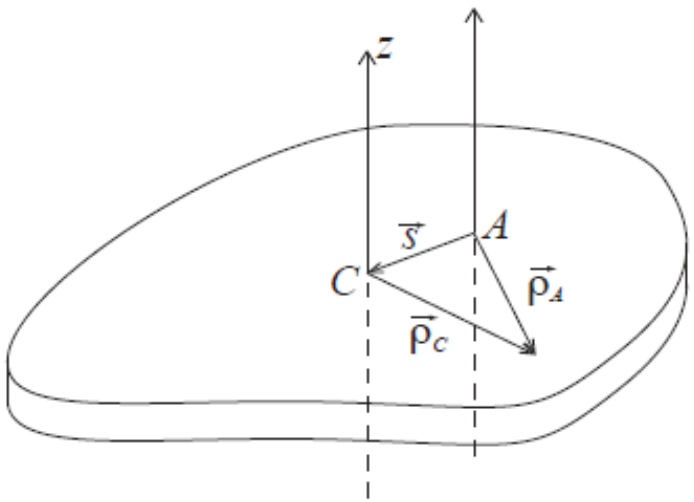
Treghetsmoment til et legeme med kontinuerlig utstrekning:

$$I_z = \int_V \rho^2 \rho_m(\vec{r}) dV$$

Kinetisk energi pga. rotasjon: $K_{rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Jo *større* treghetsmoment, jo *mer energi* behøves for å få legemet til å rotere



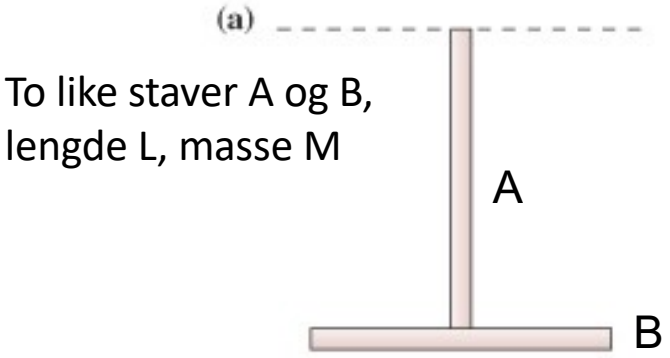


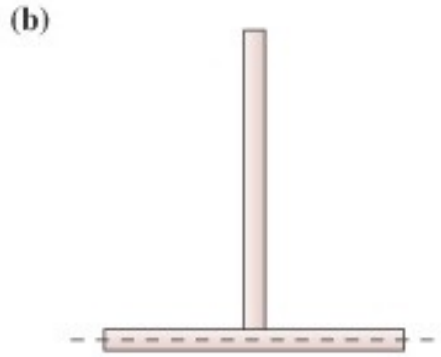
Parallellakseteoremet: $I_A = I_C + Ms^2$

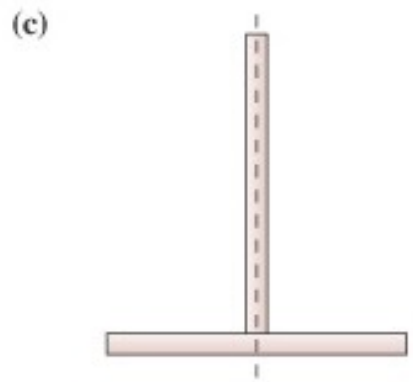
Superposisjonsprinsippet

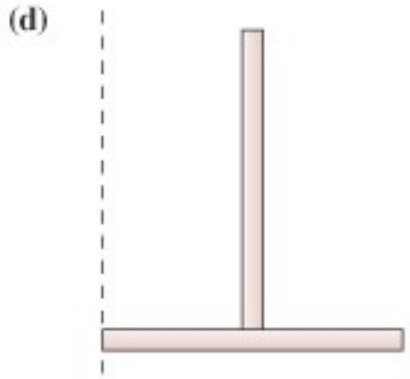
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Hva er treghetsmomentet til et legeme som består av to deler? 🤔









Mentimeter

www.menti.com kode XX

Mentimeter

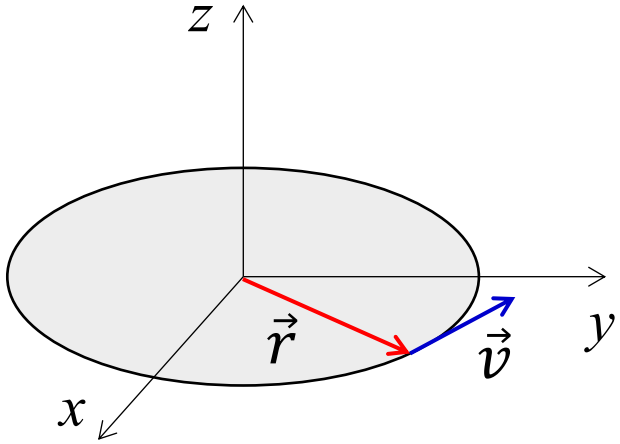
www.menti.com kode XX

Rotasjoner i tre dimensjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

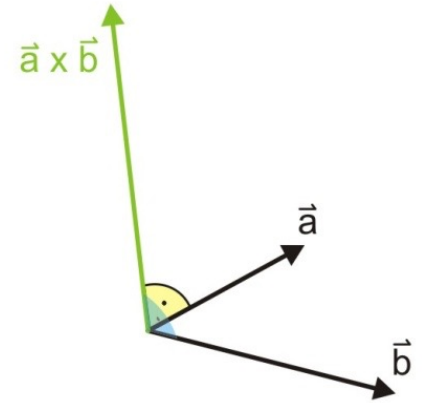
Vi velger et koordinatsystem:

- *z*-aksen er rotasjonsaksen
- rotasjon i *x*-*y*-planet

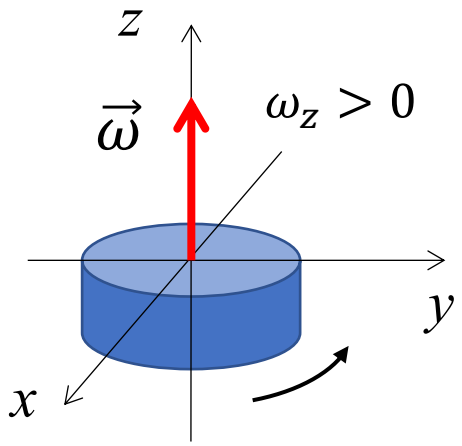


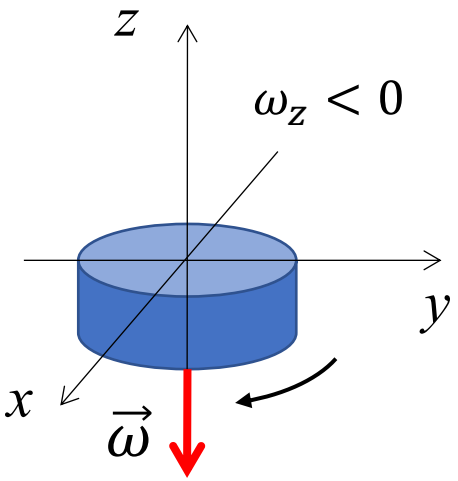
Et punkt i avstand $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ fra rotasjonsaksen beveger seg på en sirkelbane med fart $v = \omega r$

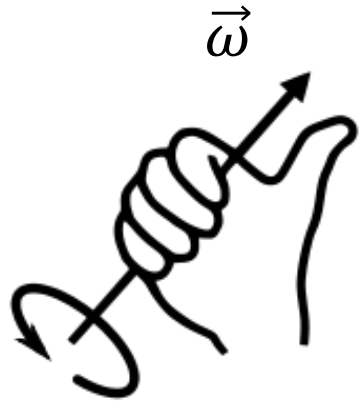
Hastigheten er i tangentiell retning:



Vi kan definere vinkelhastighet som en *vektor*:

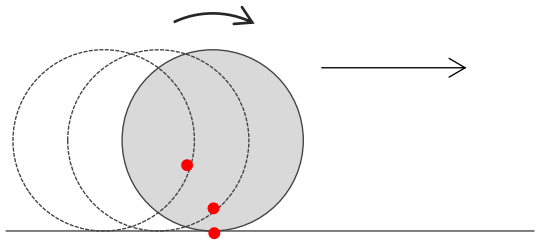


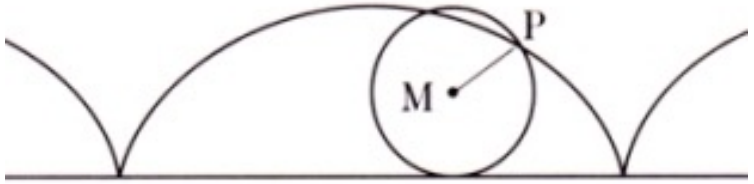


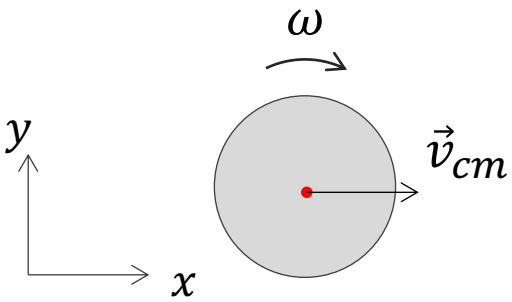


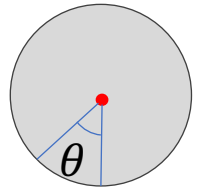
Rullebetingelsen: rulle uten å gli

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]









Hjul med radius *R*. Massesenteret: $\vec{v}_{cm}$, og i tillegg roterer hjulet med vinkelfart ω.

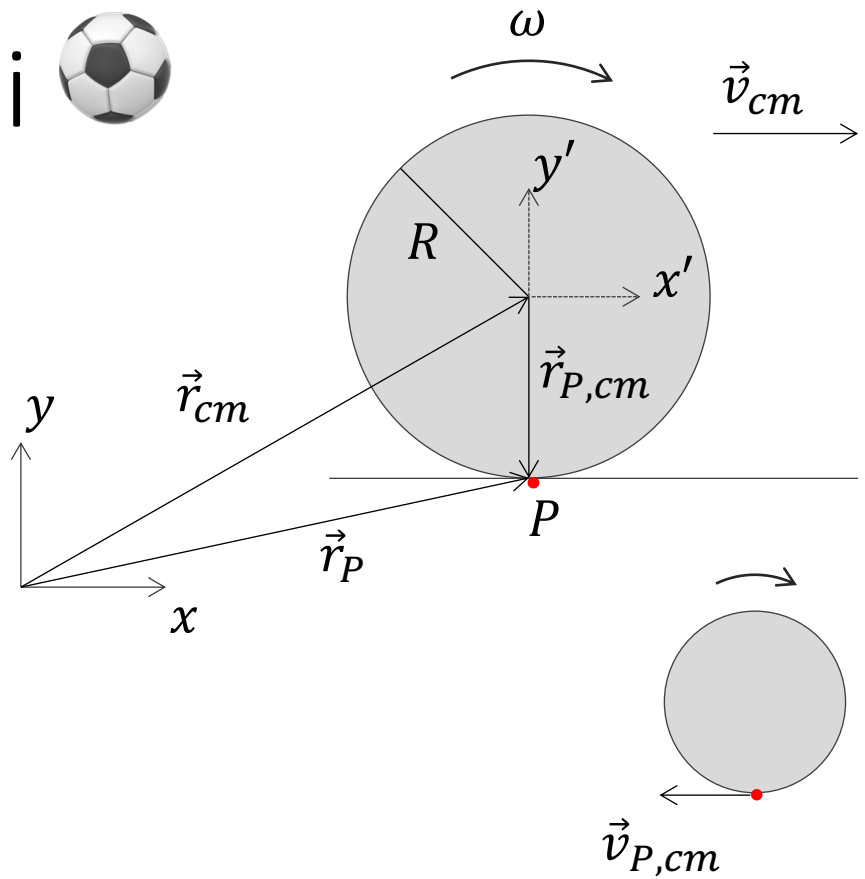
Når hjulet har rotert én omdreining, hvor langt har massesenteret flyttet seg i *x*-retning?

For en *delvis* omdreining, hvor langt har massesenteret flyttet seg i *x*-retning?

Rullebetingelsen: rulle uten å gli

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Punktet *P* beveger seg på en sirkelbane i massesentersystemet:



Rullebevegelse i *laboratoriesystemet* (vi står i ro og ser ballen trille forbi).
P bytter vertikal bevegelsesretning når det treffer bakken (fra - til + i *y*-retn.):

Hvis legemet ruller *uten å skli* så er hastigheten til *kontaktpunktet*:

Rullebetingelsen:

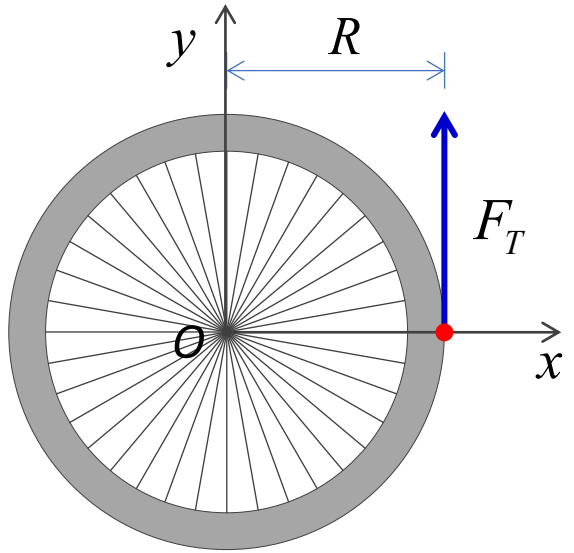
Eksempel: spinne et hjul ⚙️

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Tangentiell kraft F_T i avstand R fra aksen

Kraften virker over et *kort* tidsintervall Δt
langs en *kort* strekning Δs

Arbeid:



Kinetisk energi:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

N2L for rotasjonsbevegelse:

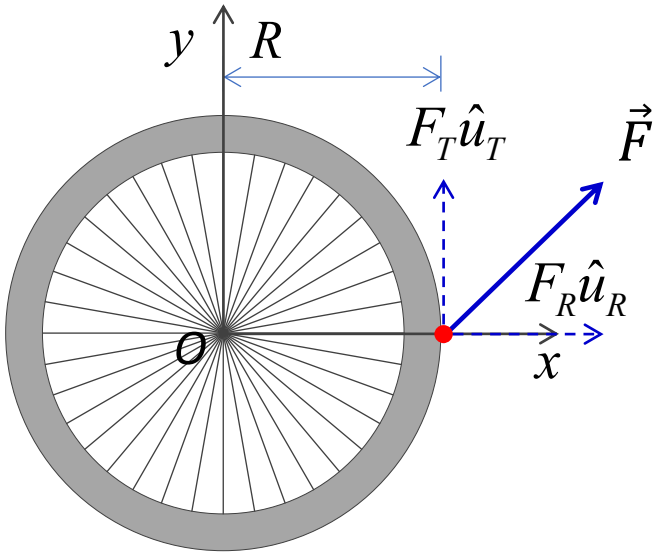
$$F_T R = I_O \alpha$$

N2L for translasjonsbevegelse:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Kraftmoment («torque») 💪

Bare den *tangentielle* kraftkomponenten bidrar til å spinne hjulet



Newtons 2. lov for rotasjoner (stivt legeme om en fast akse):
Én kraft: $F_T R = I_O\alpha$; Flere krefter: $\sum \tau_O = I_O\alpha$

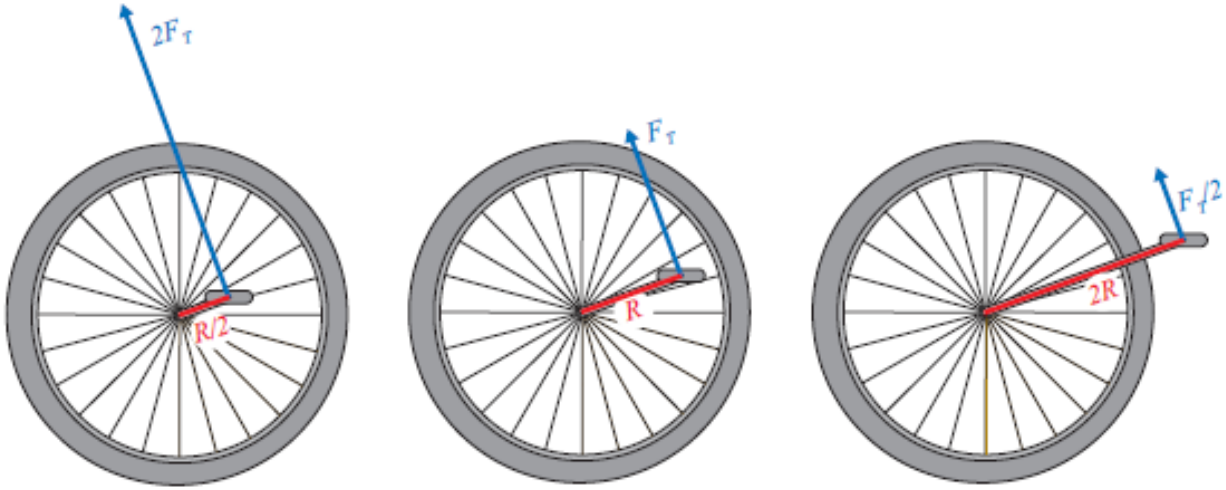
$\tau_O = F_T R, \qquad \vec{\tau}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ ***Kraftmoment***

«kraftarm × kraft»:
$\vec{r}$ er vektoren fra *O* til punktet hvor kraften angriper

Kraftmomentet er *årsak* til vinkelakselerasjonen: $\boldsymbol{\tau_O = I_O\alpha}$

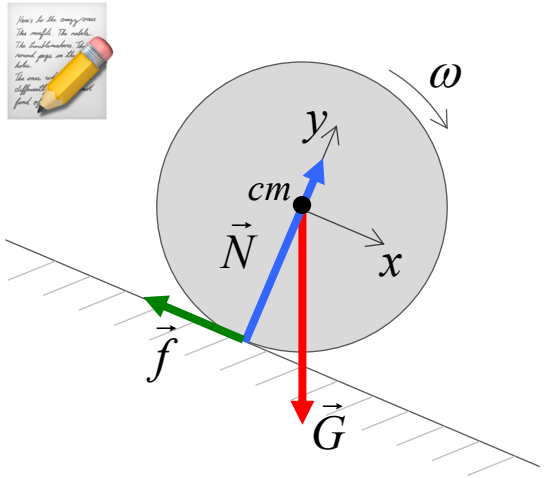
Avstanden *R* fra rotasjonsaksen gjennom *O* er viktig:

Treghetsmomentet angir *legemets motstand mot å få rotasjonshastigheten (vinkelhastigheten) endret.*



💪 Det kreves et ***kraftmoment*** for å endre rotasjonshastigheten.

Oppdatert problemløsningsoppskrift

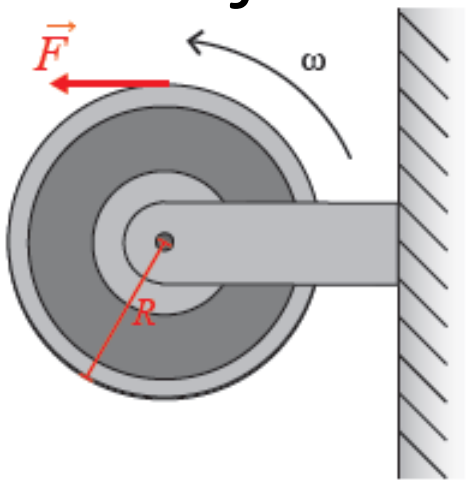


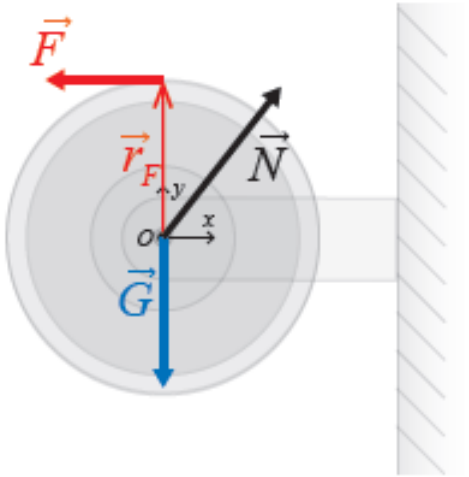
- Identifiser *system* og *omgivelser*
- Definer et koordinatsystem
- Finn massesenteret, rotasjonsaksen og treghetsmomentet
- Finn initialbetingelsene: posisjon, hastighet, vinkel, vinkelhastighet
- Finn kreftene og angrepspunktene deres
- Finn kraftmomentene for hver kraft
- Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen til massesenteret: $\sum_i \vec{F}_{ext,i} = M\vec{A}$
- Bruk Newtons andre lov for rotasjoner for å finne vinkelakselerasjonen: $\sum_i \tau_{z,i} = I_z\alpha$
- *Hvis gyldig*, bruk rullebetingelsen for å relatere translasjon og rotasjon
- Løs bevegelsesligningene for translasjon og rotasjon
- Analyser bevegelsen, sjekk at løsningen er fornuftig 👍

Eksempel: kraftmoment på et hjul

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En konstant kraft $\vec{F}$ virker tangentielt på et hjul (homogen sylinder). Finn vinkelen θ som funksjon av tiden.





Krefter:

- gravitasjon:
- konstant kraft:
- normalkraften fra aksen på hjulet:

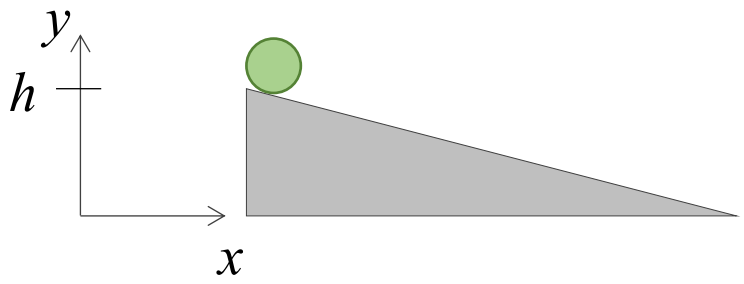
Massesenteret beveger seg ikke:

Kraftmoment:

Eksempel: en sylinder triller ned et skråplan

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Du holder en sylinder med radius *R* og masse *m* på toppen av et skråplan. Sylinderen slippes og den ruller uten å skli. Finn hastigheten til sylinderen ved bunnen av skråplanet. (Se bort fra luftmotstand)



Kinetisk energi, translasjonsbevegelse: $K_t = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$

Kinetisk energi, rotasjonsbevegelse: $K_{rot} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

Potensiell energi i tyngdefeltet: $U = mgy_{cm}$

Rullebetingelsen: $|\vec{v}_{cm}| = \omega R$

Treghetsmoment, sylinder: $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

Bevaring av mekanisk energi (hvorfor kan vi bruke det her? 🤔):

Mentimeter

www.menti.com kode XX

Mentimeter

www.menti.com kode XX

En sylinder og et sylinderskall

Samme masse (dvs. forskjellig materiale) og samme radius

Fra eksempelet tidligere:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+C}}$$

Sylinder:

$$C = \frac{I_{cm}}{mR^2} = \frac{1}{2}$$

Sylinderskall:

$$C = \frac{I_{cm}}{mR^2} = 1$$



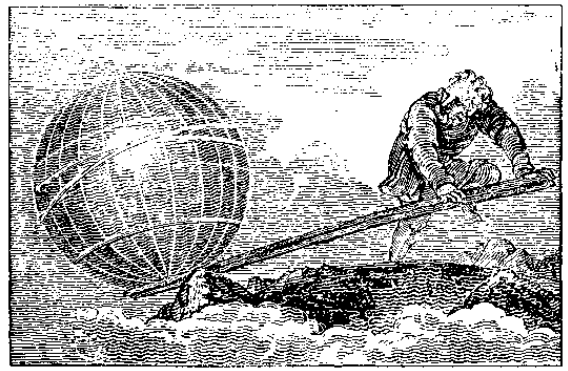
https://www.youtube.com/watch?v=CHQOctEvtTY

Mentimeter

www.menti.com kode XX

Mer om kraftmoment 💪

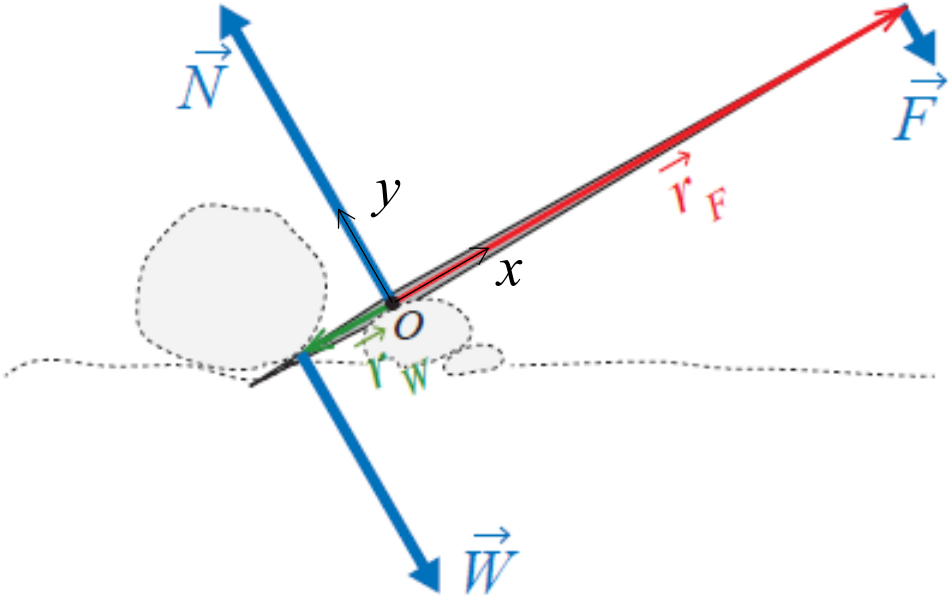
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Arkimedes: «*Gi meg et fast punkt, og jeg skal flytte jorden*.»

Fast punkt: *O*

Netto kraftmoment om *O*:



For å få et negativt kraftmoment
om *z*-aksen («med klokken»):

Takk for i dag! 😀