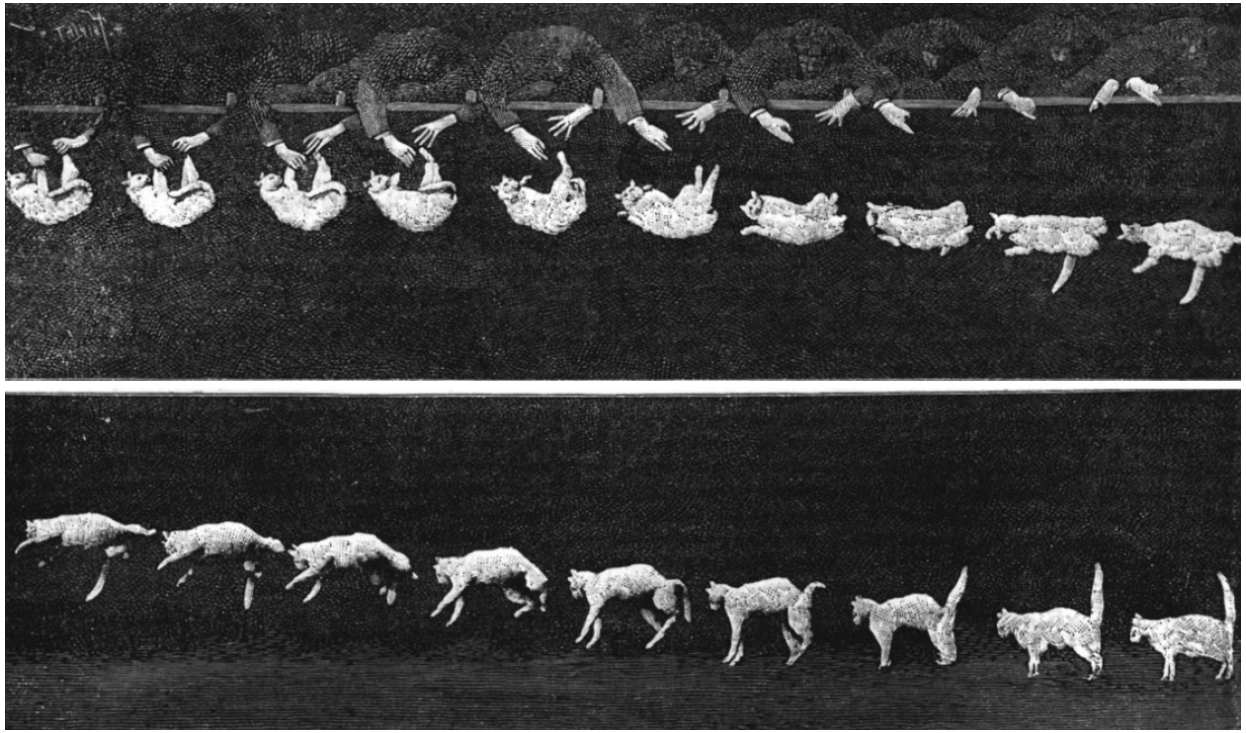
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Forelesning uke 12: Newtons 2. lov for rotasjoner, spinnsatsen. Bevaring av spinn

(AMS 16.2-16.5)

Læringsmål: Vite hva ***spinn*** (angulærmoment) er. Newtons 2. lov for rotasjoner uttrykt ved ***spinnsatsen***. Vår siste bevaringslov: ***bevaring av spinn***.



https://www.nature.com/articles/051080a0

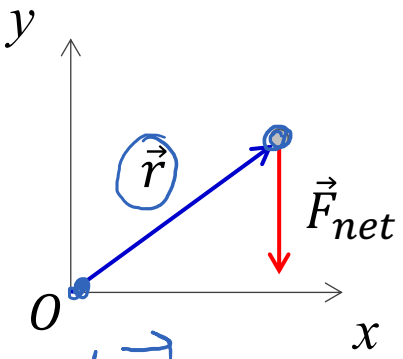
Beskjeder:

- ✓ Oblig 4 frist 25.april (på fredag). Dette blir den siste obligen 😊
- ✓ **Eksperiment 2**: seminartime neste uke (29. april), og også seminartime 6. mai (mer info og oppgavetekst legges ut i Canvas).

Tirsdag 22.04.2025

Spinn

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Newtons andre lov: $\vec{F}_{net} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Kraftmoment om *O*: $\vec{\tau}_{net} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$

Se på: $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}_{net}$ ($\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$)

Vi definerer:

Spinnet om punkt *O* for en partikkel med masse *m* og bevegelsesmengde $\vec{p}$:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

Spinnsatsen (N2Lrot): $\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O$

På engelsk:

(translational) momentum $\vec{p}$

angular momentum $\vec{l}$

(I boka: rotational momentum)

NB! Spinnet er definert i forhold til et punkt!

Uten netto *kraftmoment* er *spinnet* bevart

Uten netto *kraft* er *bevegelsesmengden* bevart

Spinnbevaring: vår 3. bevaringslov

Spinn er en *«størrelse som er bevart»*

Noethers teorem: symmetri ⇔ bevaringslov

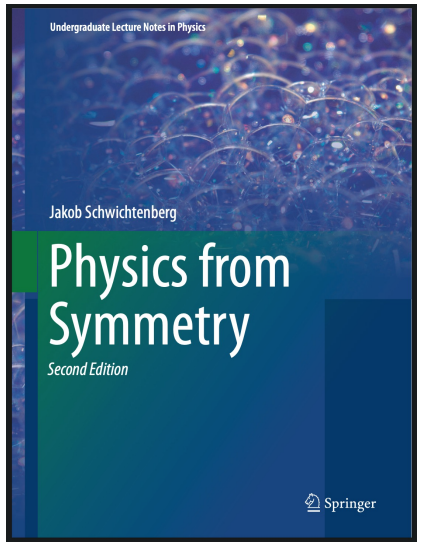
«Homogenitet» av tiden ⇒ bevaring av *energi* (valg av tid null)

«Homogenitet» av rommet ⇒ bevaring av *bevegelsesmengde* (valg av origo, koordinatsystem)

Isotropi av rommet (rotasjonsinvarians) ⇒ bevaring av *spinn* (valg av retning)



Emmy Noether
1882 - 1935

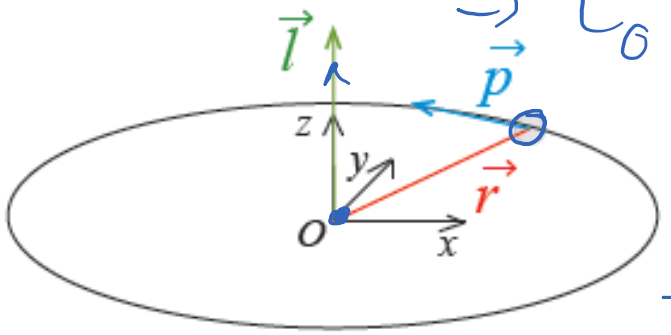


Kan lastes ned gratis via UiO-nettet
https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-66631-0

Spinn i sirkelbevegelse og lineærbevegelse

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Sirkelbane



$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$
$$= \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$\Rightarrow \vec{L}_0 = m\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - m\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})$$
$$= mr^2\vec{\omega} = mr^2\omega\hat{k}$$

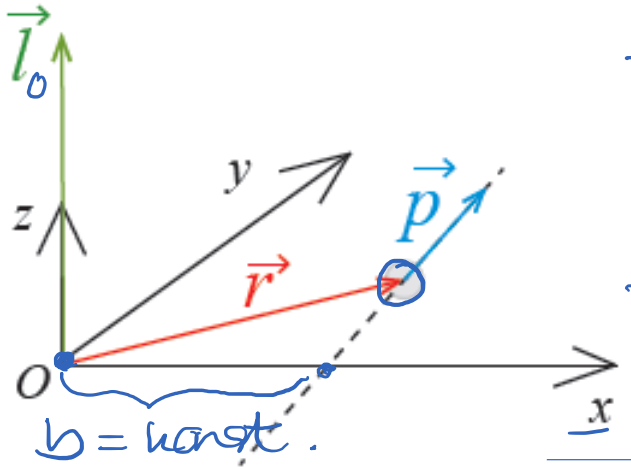
mr^2: treghetsmomentet!

Sirkelbane: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Generelt:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Husk: $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

Lineær bevegelse



Vi antar: $\vec{r} = b\hat{i} + y(t)\hat{j}$, b konst.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = v_y\hat{j}$$

Spinn: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$= (b\hat{i} + y(t)\hat{j}) \times mv_y\hat{j} = bmv_y\hat{k}$$

$\hat{j} \times \hat{j} = \vec{0}$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

NB! En masse med lineærhastighet har også et spinn i forhold til et punkt!

Spinn til et stivt legeme

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

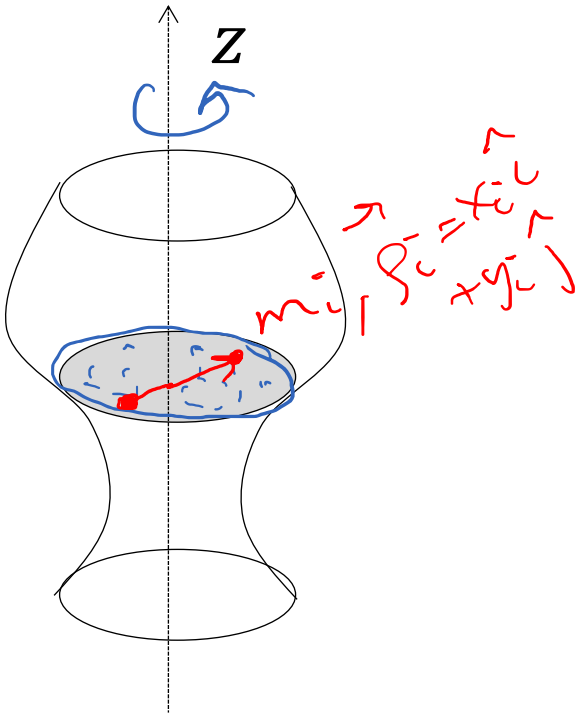
Spinn, stivt legeme: $\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z + \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$, $\vec{\rho}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}$

Spesialtilfelle: et rotasjonssymmetrisk, homogent legeme roterer om symmetriaksen

For hver skive ved høyden *z* er: $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$ ("like mye + og −")

Massesenteret til skiven ligger på z-aksen: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\rho}_i$, $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$

Spinnet er parallelt med rotasjonsaksen: $\vec{L}_O = \vec{\omega} \cdot I_z$

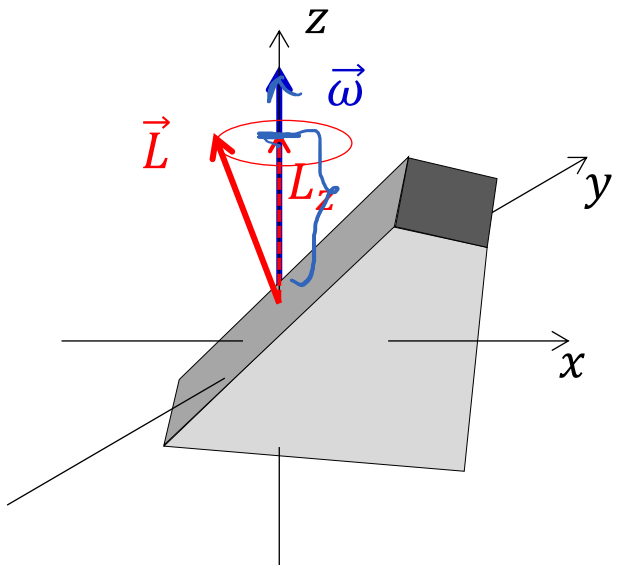


Generelt: $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ er ***ikke*** parallelle!

z-komponent: $L_{O,z} = I_z \omega$

Kraftmoment: (fra spinnsatsen):

$$\tau_{O,z} = \frac{dL_{O,z}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha$$

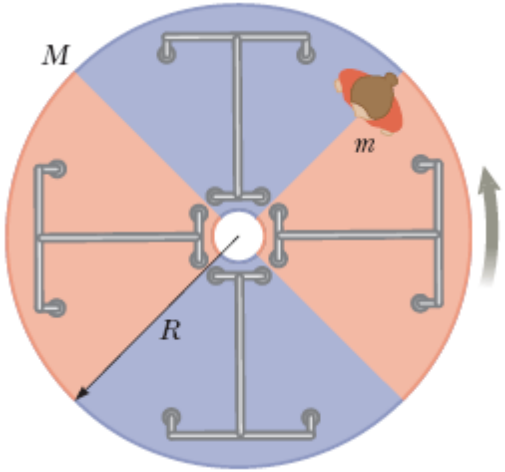


Mentimeter Et barn kjører karusell

www.menti.com kode 6494 0628

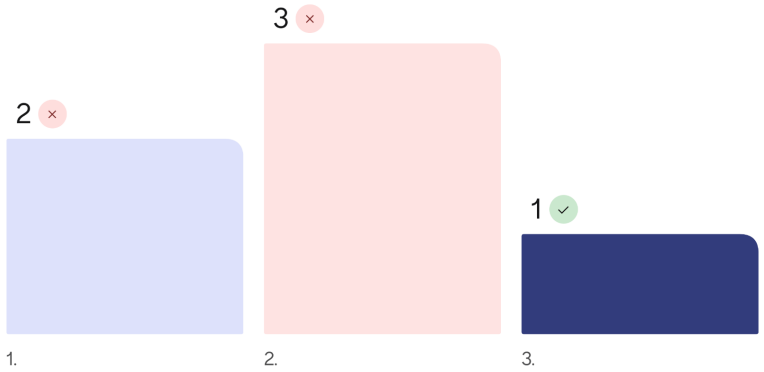
Et barn står på en karusell som roterer uten friksjon. Barnet går sakte mot karusellens senter. Hvordan endrer spinnet til hele systemet seg (barn + karusell) mens barnet beveger seg innover?

1. spinnet øker
2. spinnet minker
3. spinnet er konstant



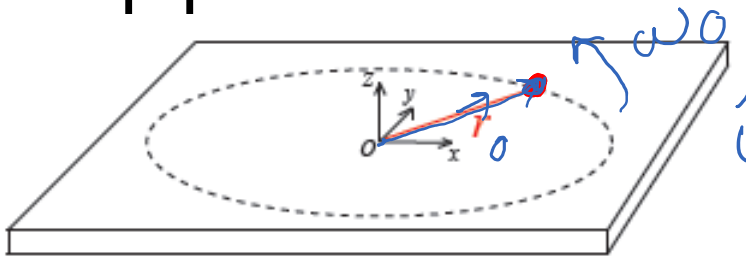
Ikke noe ytre kraftmoment
på systemet karusell + barn

⇒ spinn er bevart, svar 3 😎



Eksempel: En kloss snurrer rundt oppå et bord

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



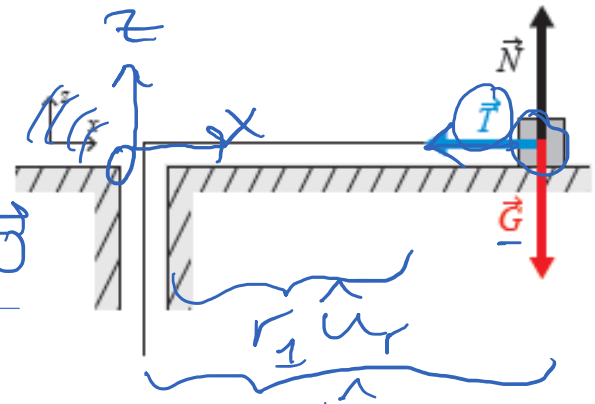
$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

En liten kloss med masse *m* henger i en masseløs snor som går gjennom et hull i et friksjonsfritt bord. Klossen har vinkelfart ω_0 ved radius r_0. Vi trekker sakte i snoren. Hva skjer med vinkelfarten?

Gravitasjon kompenseres av normalkraften.

Eneste kraft i *xy*-planet: snordraget $\vec{T} = -T\hat{u}_r$

Kraftmoment til snordraget: $\vec{\tau}_T = \vec{r}_T \times \vec{T} = r\hat{u}_r \times (-T\hat{u}_r) = \vec{0}$



Spinnsats: $\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$

⇒ Spinnet er bevart: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Klossen beveger seg på en sirkelbane: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\omega\hat{k}$

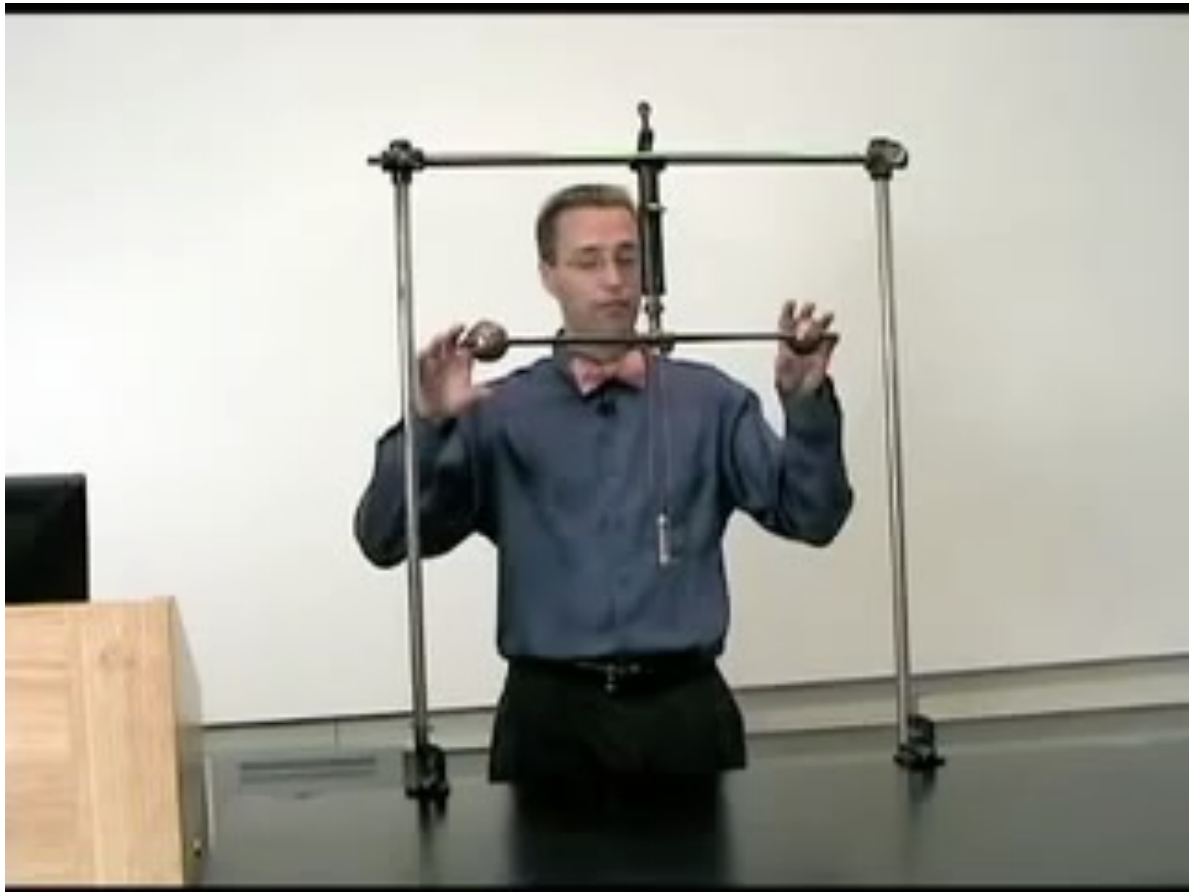
Spinnbevaring: $mr_0^2\omega_0 = mr_1^2\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\omega_0$

Siden $r_1 < r_0$ $\Rightarrow \omega_1 > \omega_0$

Vinkelfarten *øker* når vi drar inn snoren

Spinn, to kuler på en akse

Uten netto *kraftmoment* er *spinnet* bevart



https://www.youtube.com/watch?v=0k276y9kuQQ

Mentimeter Kunstløperen

www.menti.com kode 6494 0628

En kunstløper som roterer med vinkelhastighet ω_0 trekker armene inntil seg og halverer treghetsmomentet: $I_1 = \frac{1}{2} I_0$. Etterpå er vinkelhastigheten:

A. $\omega_1 = \frac{1}{4}\omega_0$

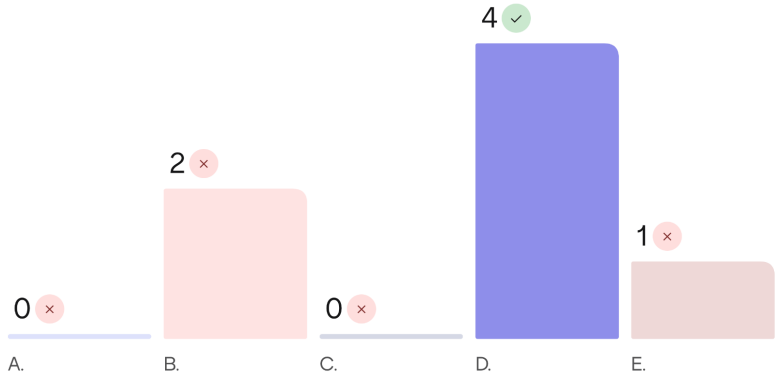
B. $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$

C. $\omega_1 = \omega_0$

D. $\omega_1 = 2\omega_0$

E. $\omega_1 = 4\omega_0$





Svar D.

Å trekke inn armene:

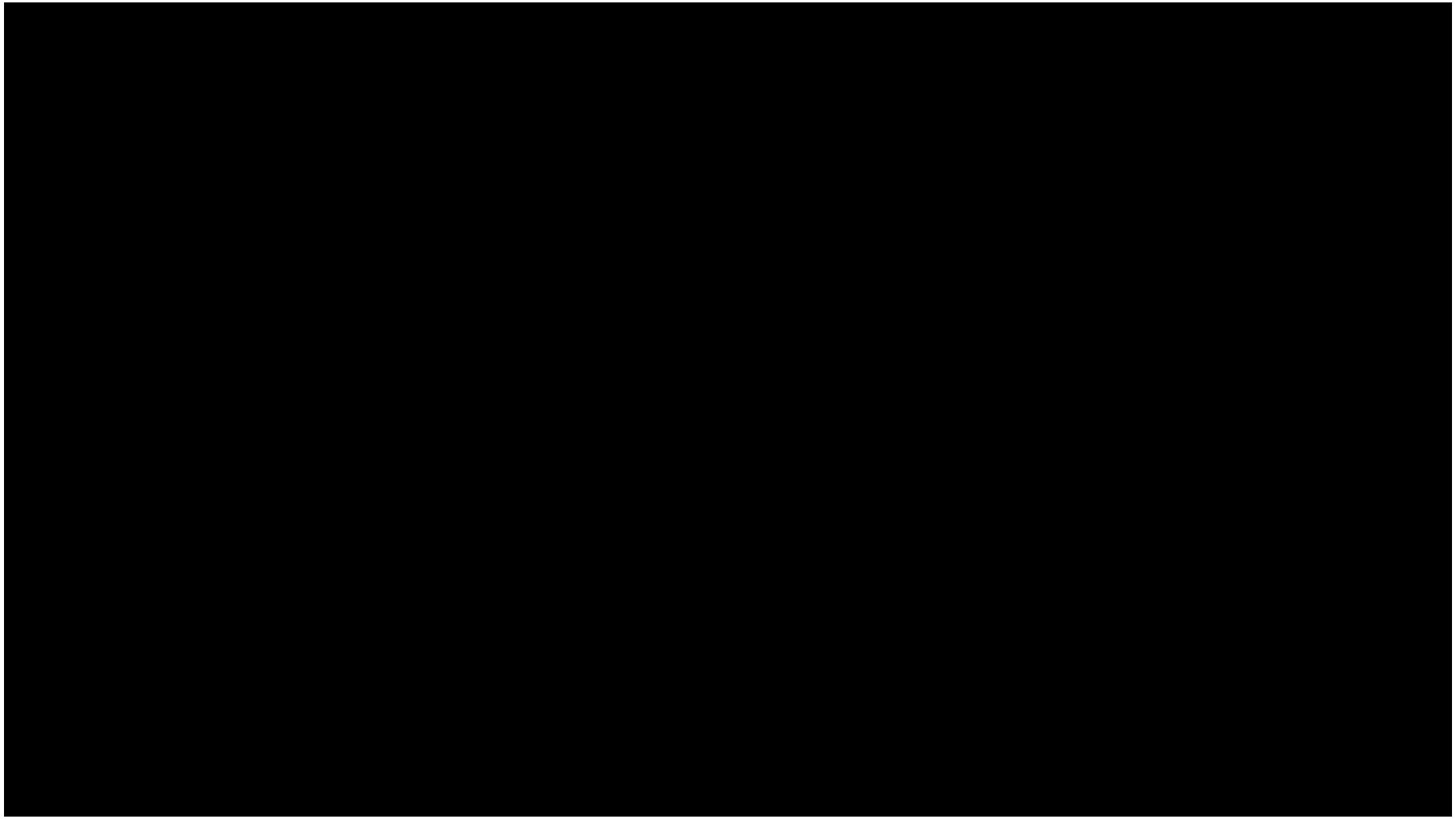
⇒ ingen ytre kraftmoment

⇒ spinn er bevart

$$L_{0,z} = L_{1,z}$$

$$I_{0,z}\omega_0 = I_{1,z}\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_{0,z}}{\frac{1}{2}I_{0,z}}\omega_0 = 2\omega_0$$

Mer spinnbevaring ⛸️

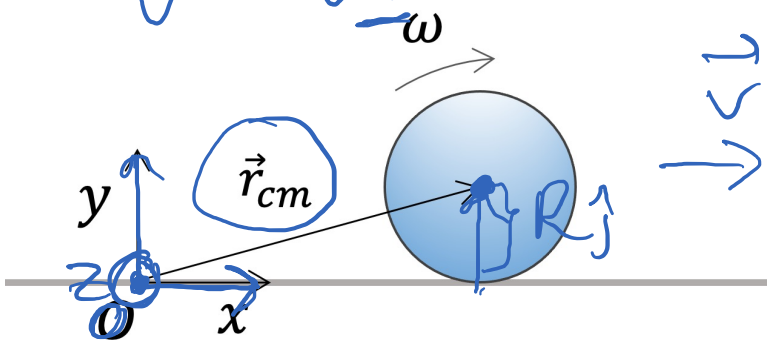


https://www.youtube.com/watch?v=fwAjPOR28J0

Eksempel: en sylinder som ruller uten å gli

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En homogen, full sylinder med radius *R* og masse *M* ruller med konstant vinkelfart uten å gli bortover gulvet. Hva er spinnet til sylinderen i forhold til det faste punktet *O*?



Lign. (16.106) i AMS, bevis i A.10:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + \vec{L}_{cm}$$

Spinn pga rotasjon om symmetriakse: $|\vec{L}_{cm}| = I_{cm}\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$

Spinn pga massesenterets hastighet: $|\vec{r}_{cm} \times \vec{P}|$

$= |(x\hat{i} + R\hat{j}) \times M\vec{V}| = RMV$

Totalspinn: $L_O = RMV + \frac{1}{2}MR^{\not 2}\cdot\frac{V}{\not R} = \frac{3}{2}MRV$

Retning: negativ z-retning $(-\hat{k})$

Rullebetingelse: $V = \omega R$

Fellesoppgave: en sylinder på et skråplan

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Ei kule med masse *m* og radius *R* befinner seg på et skråplan med helningsvinkel θ. Kula er i ro ved en høyde *h* over bakken, og så slippes kula. Kula triller ned skråplanet til venstre, så over en strekning som er horisontal, og så triller den opp et skråplan til høyre som har samme helningsvinkel (se figur). Det er tilstrekkelig friksjon (med samme friksjonskoeffisient) på alle flater slik at kula kan rulle uten å gli. Vi ser bort fra luftmotstand.

a) Tegn et frilegemediagram for kula i de tre situasjonene når den triller ned det første skråplanet, når den triller på den horisontale flaten, og når den triller opp på det andre skråplanet.

b) Beregn spinnet til kula om kontaktpunktet med bakken i det den nettopp har kommet ned fra det første skråplanet.



Fellesoppgave: en sylinder på et skråplan

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

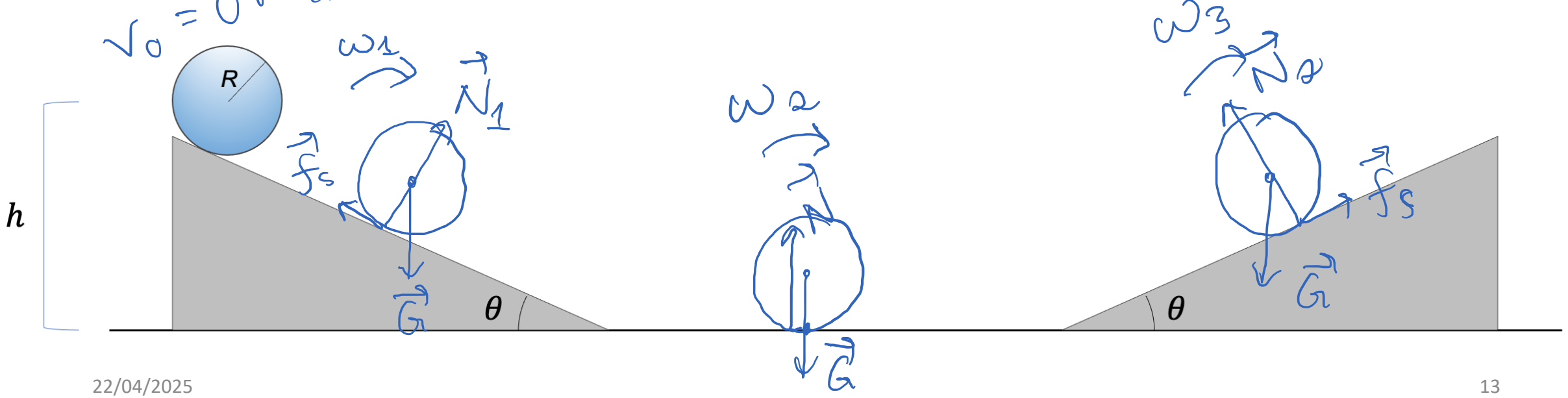
a) Tegn et frilegemediagram for kula i de tre situasjonene når den triller ned det første skråplanet, når den triller på den horisontale flaten, og når den triller opp på det andre skråplanet.

Ned skråplanet: Normalkraft $\vec{N}_1$, Tyngdekraft $\vec{G}$, Friksjon f_s

Horisontal:
$\vec{N}$: normalkraft
$\vec{G}$: tyngdekraft

Opp skråplanet:
$\vec{N}_2 = \vec{N}_1$: normalkraft
$\vec{G}$: tyngdekraft
$\vec{f}_s$: friksjon

$\omega_0 = 0$ rad/s
$v_0 = 0$ m/s



Fellesoppgave: en sylinder på et skråplan

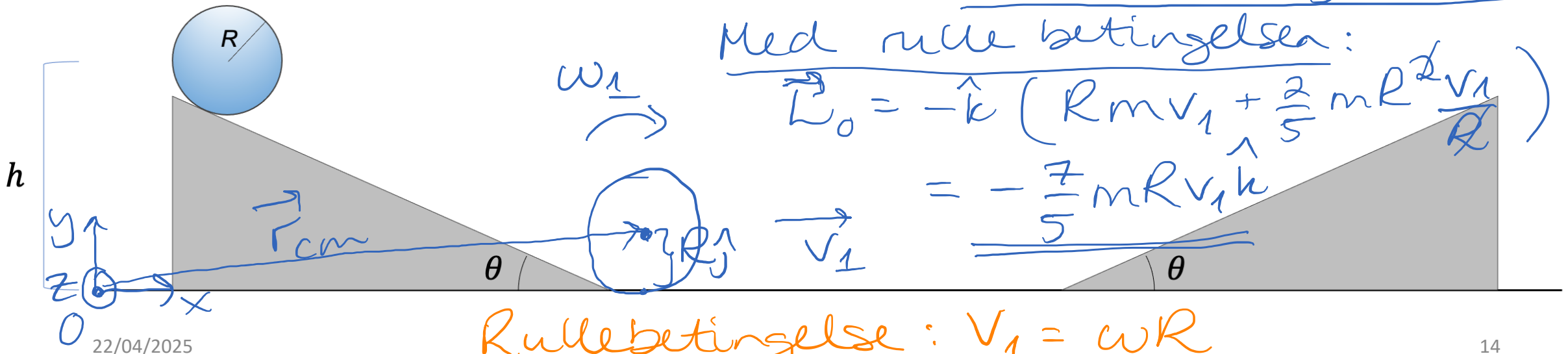
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

a) Tegn et frilegemediagram for kula i de tre situasjonene når den triller ned det første skråplanet, når den triller på den horisontale flaten, og når den triller opp på det andre skråplanet. $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$

b) Beregn spinnet til kula om kontaktpunktet med bakken i det den nettopp har kommet ned fra det første skråplanet.

$\vec{L}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{p} + I_{cm}\vec{\omega}$, $\vec{v}_1 = v_1\hat{i}$, $\vec{r}_{cm} = x(t)\hat{i} + y\hat{j} = x(t)\hat{i} + R\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{L}_O = (x\hat{i} + R\hat{j}) \times mv_1\hat{i} + I_{cm}\vec{\omega} = -Rmv_1\hat{k} - \frac{2}{5}mR^2\omega\hat{k}$



Med rulle betingelsen:

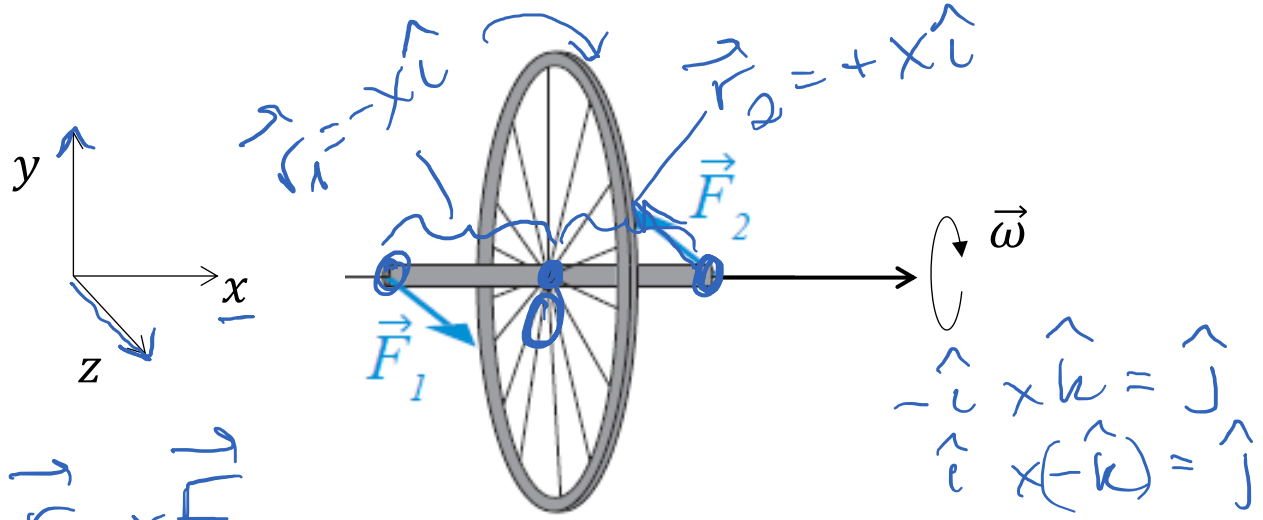
$\vec{L}_O = -\hat{k}\left(Rmv_1 + \frac{2}{5}mR^{\not 2}\frac{v_1}{\not R}\right)$

$= -\frac{7}{5}mRv_1\hat{k}$

Rullebetingelse: $v_1 = \omega R$

Endring av spinnakse

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Hjulet roterer om *x*-aksen: $\vec{L} = I_x \omega \hat{\imath}$

Origo i *massesenteret,*
kreftene angriper i avstand *x*, $F_1 = F_2 = F$

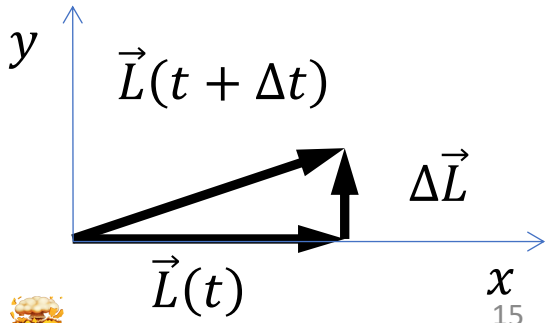
Kraftmoment: $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

$= (-x\hat{\imath} \times F\hat{k}) + (x\hat{\imath} \times (-F\hat{k})) = 2xF\hat{\jmath}$

Spinnsats: $\vec{\tau}_{net} \approx \frac{\Delta \vec{L}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} \quad | \cdot \Delta t$

Over et tidsintervall Δt: $\vec{L}(t+\Delta t) \approx \vec{L}(t) + \vec{\tau}_{net} \cdot \Delta t$

$= I_x \omega \hat{\imath} + 2xF\Delta t\hat{\jmath}$



Kreftene virker i $\pm z$-retning, spinnet «reagerer» i y-retning 🤯

Eksempel: gyroskop



[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Spinn i *x*-retning: $\vec{L}_O = I_x \vec{\omega}$

Normalkraften virker i origo *O*
⇒ ingen kraftmoment om *O*

Gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{k}$ Angrepspunkt: $\vec{r}_G = r\hat{\imath}$

Kraftmoment:

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = r\hat{i} \times (-mg\hat{k}) = rmg\hat{j}$$

Vinkelendring $\Delta\varphi$:

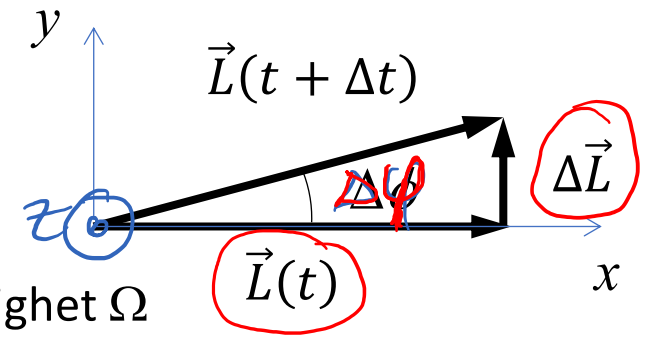
$$\tan(\Delta\varphi) = \frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}(t)|}$$

Liten $\Delta\varphi$:

$$\tan(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi \quad \text{(ii)}$$

Spinnsats: $\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}\vec{L} \approx \frac{\Delta L}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t) = \vec{\tau}_{net} \cdot \Delta t \quad \text{(i)}$$



Spinnaksen dreier i horisontalplanet om *z*-aksen ⇒ ***presesjon*** om z-aksen med vinkelhastighet Ω

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \overset{\text{bruker (ii)}}{=} \frac{1}{\Delta t}\frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}(t)|} \overset{\text{bruker (i)}}{=} \frac{|\vec{\tau}_{net}|}{I_x\omega} = \frac{rmg}{I_x\omega}$$

Ω øker når ω blir mindre
(ω blir mindre pga. friksjon)

Tungt svinghjul

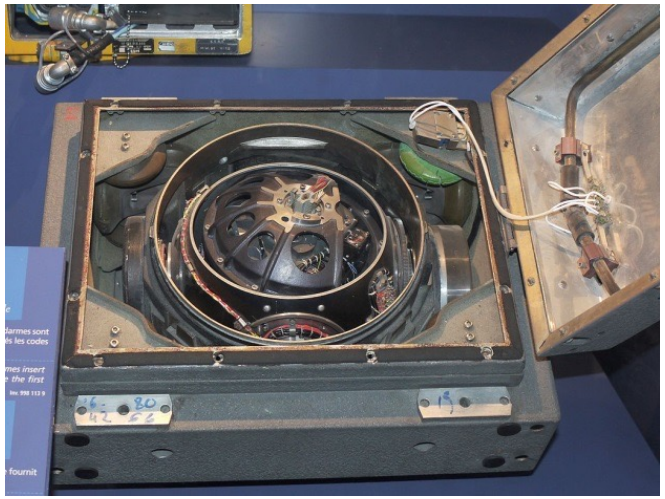




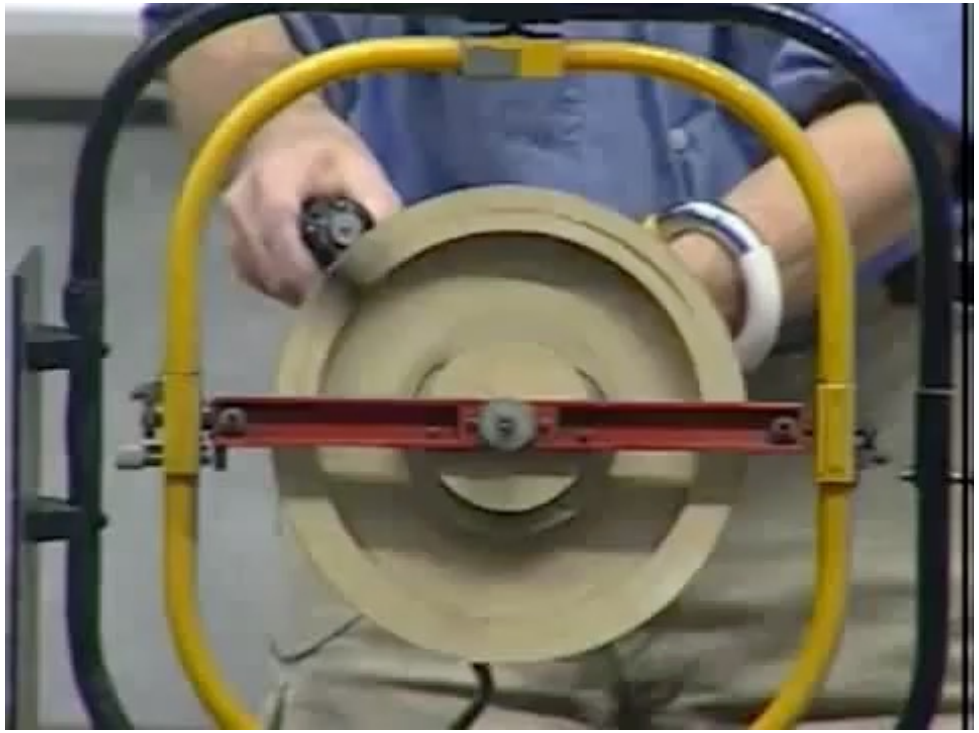
https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo&t=29s

«Treghetsnavigasjon» ved hjelp av gyroskop

Autopilot i fly:
basert på bevaring av spinn ✈️
Også i satellitter, ...



Fra en ballistisk rakett



https://www.youtube.com/watch?v=N92FYHHT1qM

Takk for i dag! 😀