# FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
# Seminar uke 4: Differensialligninger og Newtons lover. Sirkelbevegelse. Dekomponering av krefter.

(AMS kap. 4.2, 5.6.1; Kalkulusboka kap 10, spesielt 10.1, 10.4)

**Læringsmål**:

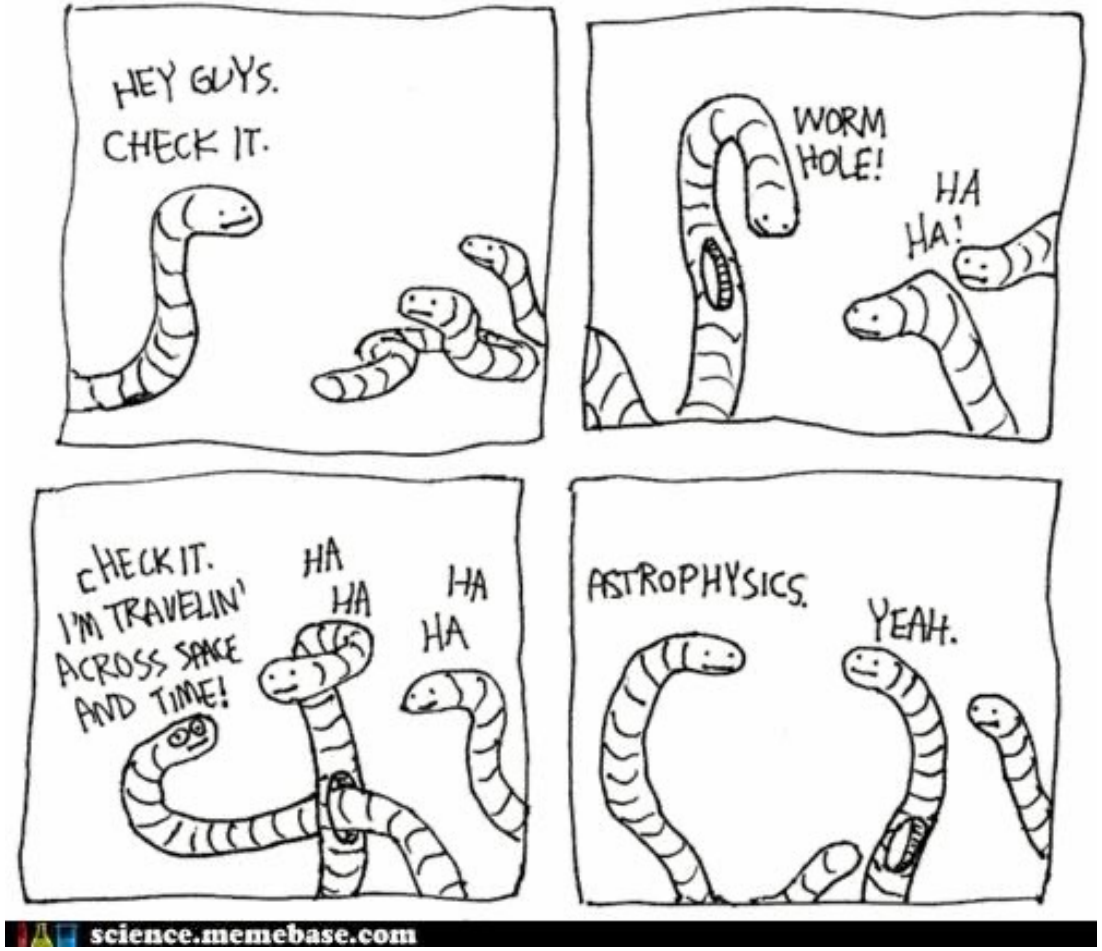
Kunne løse ***1. ordens separable differensialligninger***.

Bli vant med at Newtons 2. lov er en ***differensialligning.***

***Analytisk løsning*** av noen differensialligninger.

Buet bevegelse og sirkelbevegelse: ***sentripetalakselerasjon*** og ***baneakselerasjon***.

Vi repeterer kort ***dekomponering av krefter***.




Tirsdag 11.02.2025

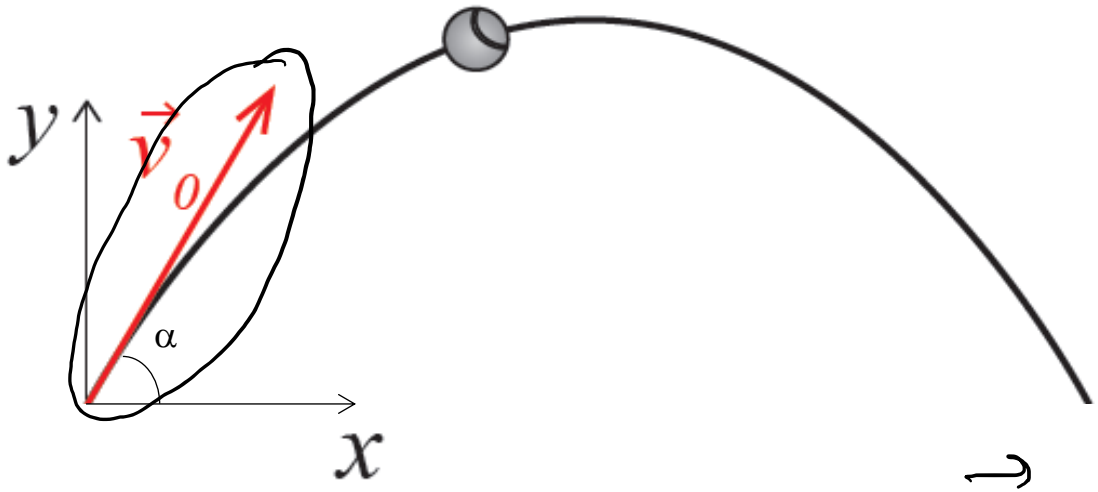
# Dekomponering av krefter (1)

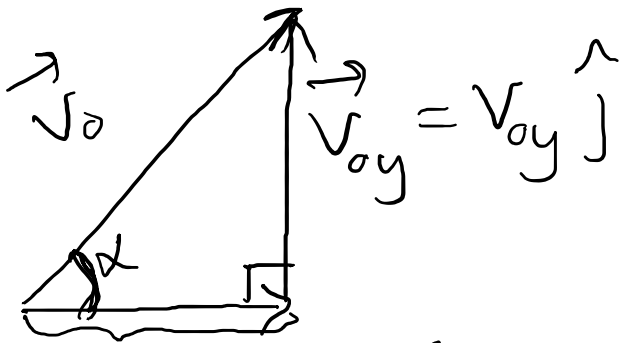
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En vektor kan alltid skrives som summen av to vektorer som står vinkelrett på hverandre:

$|\vec{v}_0| = v_0$

$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$




På komponentform: $\vec{v}_{0x} = v_0 \cos\alpha\,\hat{i}$, $\vec{v}_{0y} = v_0 \sin\alpha\,\hat{j}$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\hat{i} + v_0 \sin\alpha\,\hat{j}$$

# Dekomponering av krefter (2)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

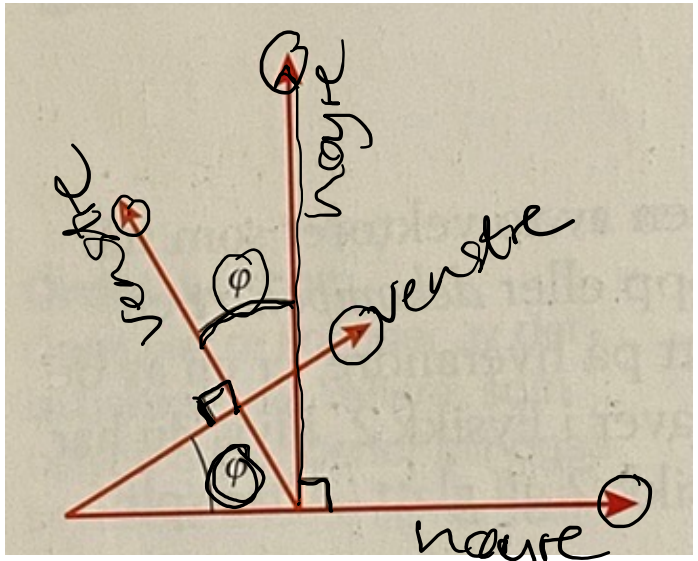
📝 Oppskrift:

1) Velg et passende koordinatsystem
2) Tegn et frilegemediagram med alle kreftene som virker på objektet
3) Dekomponer hver kraft i sin x- og y-komponent
4) Legg sammen alle x-komponenter for seg og y-komponenter for seg for å finne netto kraft i x- og y-retning

**Hvordan finne igjen vinkelen for f.eks. et skråplan:**

To vinkler er like store dersom venstrebeina er vinkelrett på hverandre og høyrebeina er vinkelrett på hverandre 👍

[Bilde fra Ergo, Fysikk2]

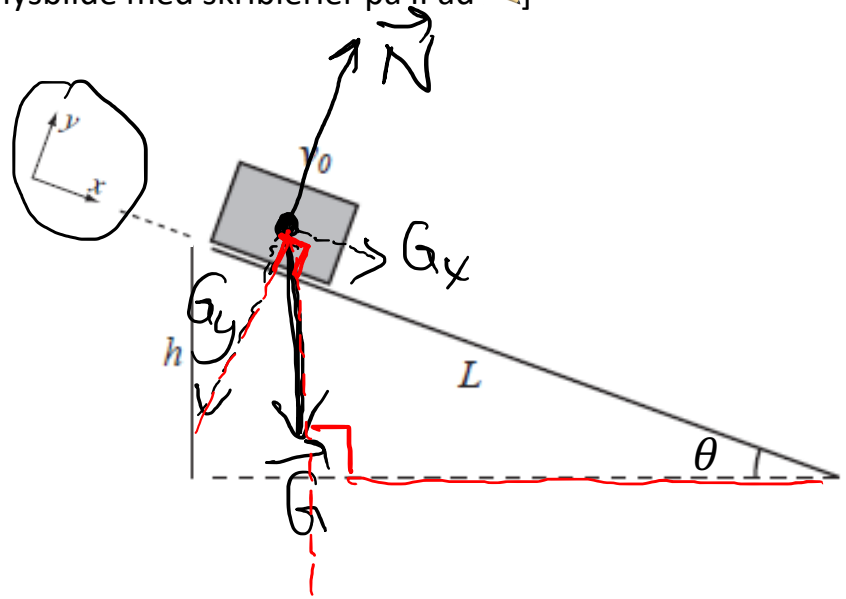


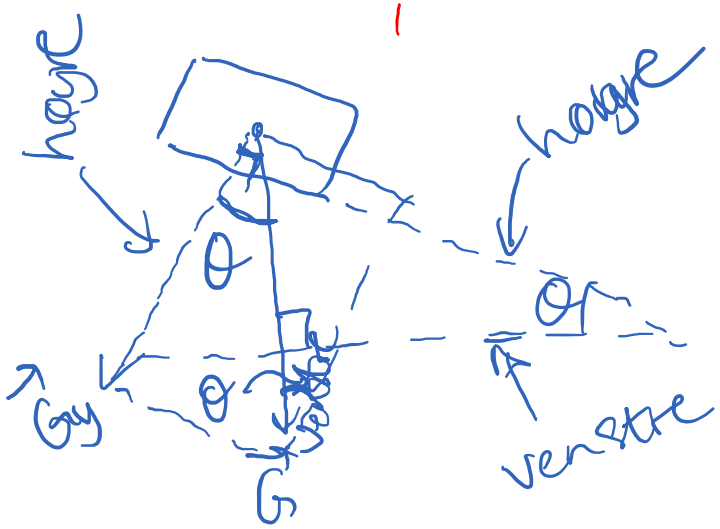

Flere eksempler:

https://study.com/skill/learn/decomposing-two-or-more-forces-acting-on-an-object-in-arbitrary-directions-into-perpendicular-components-explanation.html

# Eksempel: en kloss sklir på et skråplan

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




**Koordinatsystem**:

- x-aksen langs planet
- y-aksen vinkelrett på planet

Vi neglisjerer luftmotstand og friksjonskrefter 😜

Krefter: $\vec{N}$, normalkraft | $\vec{G}$, tyngdekraft

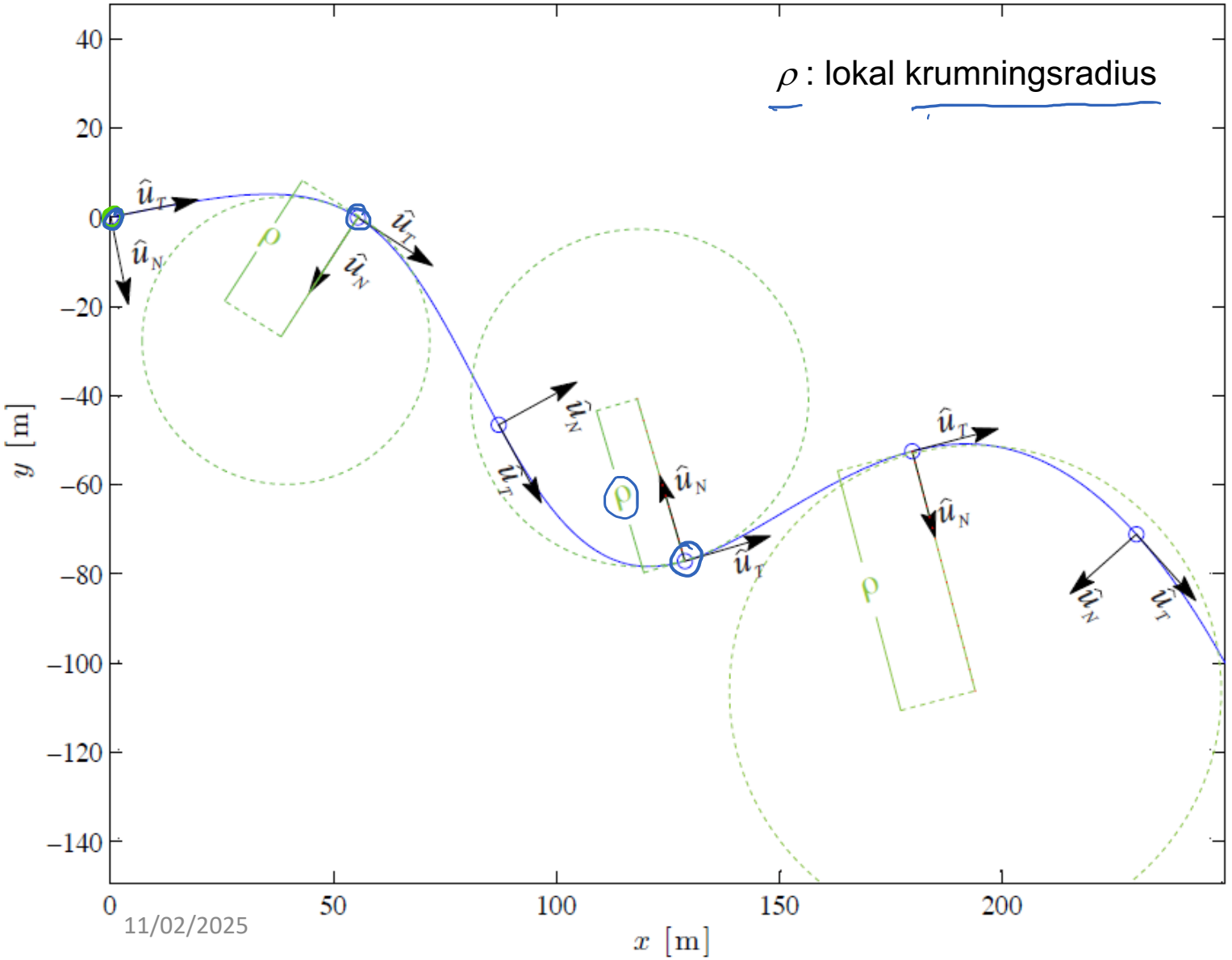
$\vec{N} = N\hat{j}$

Komponentene til tyngdekraften:

$\vec{G}_y = -mg\cos\theta\,\hat{j}$

$\vec{G}_x = +mg\sin\theta\,\hat{i}$

# Buet betinget bevegelse 🚙



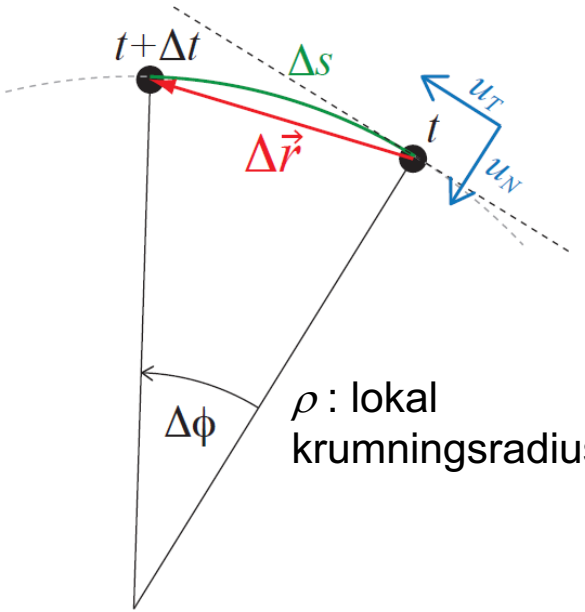

***Lokale* koordinater**:

koordinatsystem av tangentiell vektor $\hat{u}_T$ og normal vektor $\hat{u}_N$ som følger med objektet langs banen

# Buet betinget bevegelse 🚙

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N \quad (1)$$




***Lokale* koordinater**:

koordinatsystem av tangentiell vektor $\hat{u}_T$ og normal vektor $\hat{u}_N$ som følger med objektet langs banen

(1) kommer fra derivasjon av hastighetsvektor:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(t)\cdot\hat{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{u}_T + v\cdot\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v}{\rho}\hat{u}_N$$

***Tangentialkomponent*** av akselerasjonen:

- forandring av *farten langs banen* (størrelsen til hastigheten)

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

***tangentialakselerasjon***

***Normalkomponent*** av akselerasjonen:

- forandring av *bevegelsesretningen*
- akselerasjon som trengs for å bli på banen

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

***sentripetalakselerasjon***

$\rho$ = lokal krumningsradius

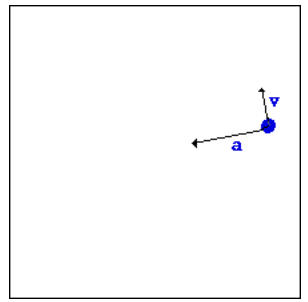
# Eksempel: konstant fart langs en sirkelbane (1)

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Et legeme beveger seg med konstant fart på en sirkelbane med radius R.

$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 = \text{konst.}, \quad \vec{v}(t) = v_0 \hat{u}_T(t)$

Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$



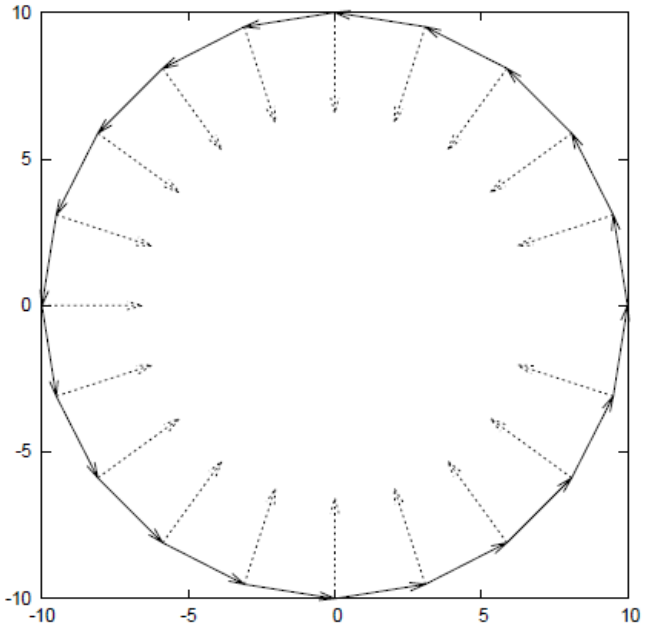

Tangentialakselerasjon:

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$, siden $v_0 = \text{konst}$

Legemet beveger seg med ***konstant fart*** og har ingen akselerasjon *langs sirkelbanen*.

Sentripetalakselerasjon: (normalt på banen, $\hat{u}_N$-retn)

$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2}{R}$




Sentripetalakselerasjonen har ***konstant størrelse*** (fordi farten er konstant) og peker inn mot sirkelens sentrum.

# Eksempel: konstant fart langs en sirkelbane (2)

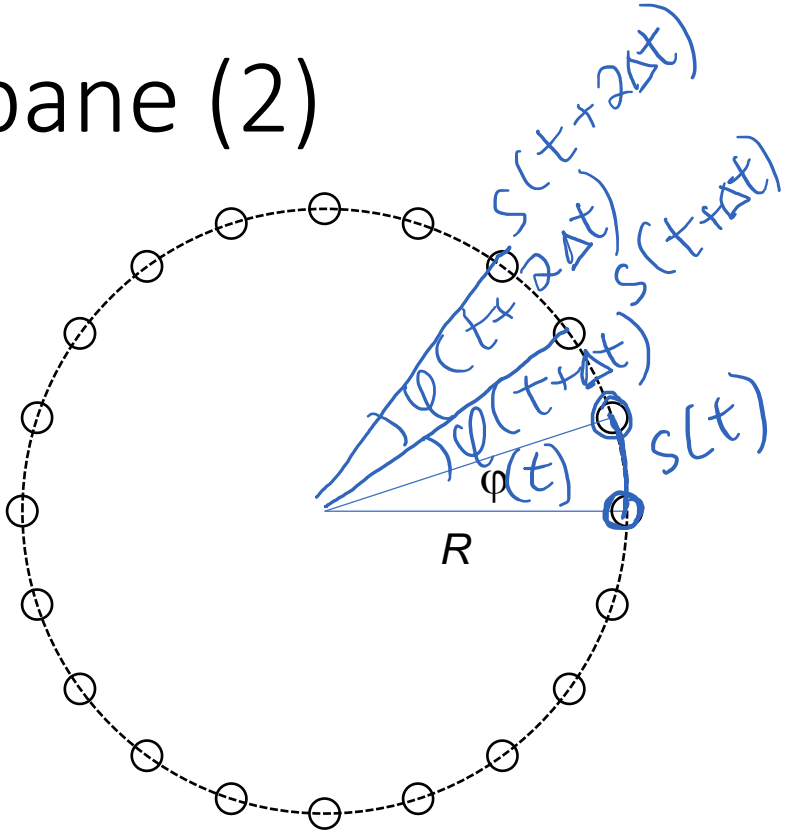
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Et legeme beveger seg på en sirkelbane med radius $R$ med konstant fart $v$.
Det tar en tid $T$ for et ~~helt omløp~~.

Farten er konstant: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$

Strekningen $s(t) = R \cdot \varphi(t)$, $\varphi(t)$ i radianer

$\Rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = R\omega$




***Vinkelfart ω***, enhet rad/s

---

Her er vinkelfart konstant: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

Sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = \text{konst}$

---



Konstant fart ⇒ ingen tangential(bane-)akselerasjon ***Sentripetalakselerasjon*** 👍

# Mentimeter Berg-og-dalbane

www.menti.com kode 2861 8351

En berg-og-dalbane kjører gjennom en loop. I det laveste punkt er akselerasjonen fire ganger større enn på toppen av loopen. I forhold til farten på toppen er farten i bunnen:

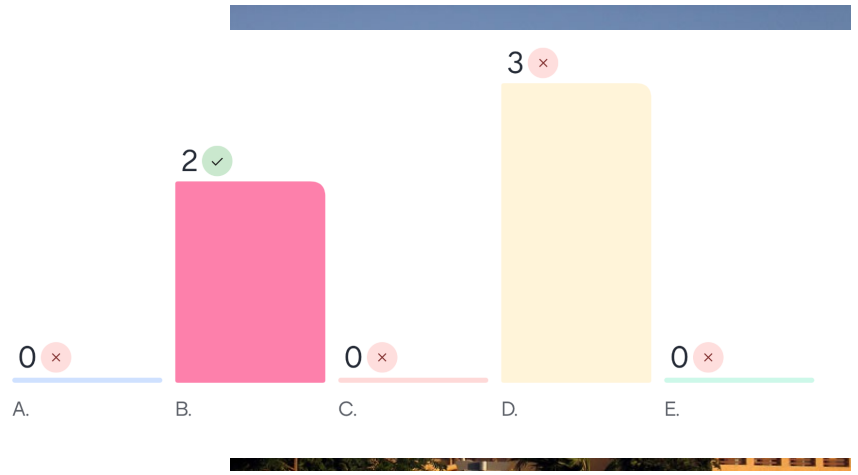
A. $\sqrt{2}$ ganger større

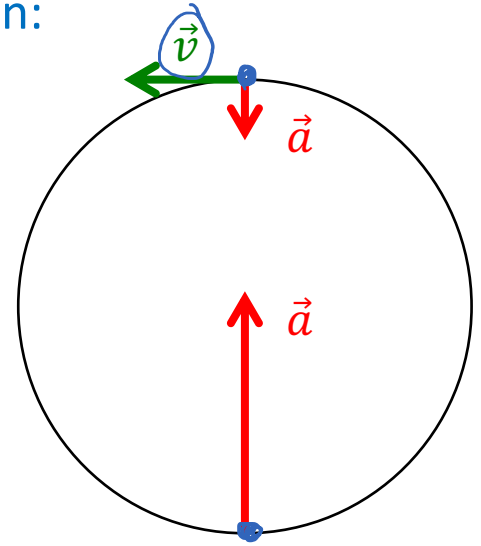
B. 2 ganger større

C. 4 ganger større

D. 16 ganger større

E. avhengig av vekten




$a_{bunn} = 4a_{topp} = 4\frac{v^2}{R} = \frac{(2v)^2}{R}$

⇒ Farten i bunnen er 2 ganger større enn på toppen

Sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2}{R}$

Vi kan beskrive *bevegelsen* langs en bane, men hvordan finner vi *akselerasjonen*?

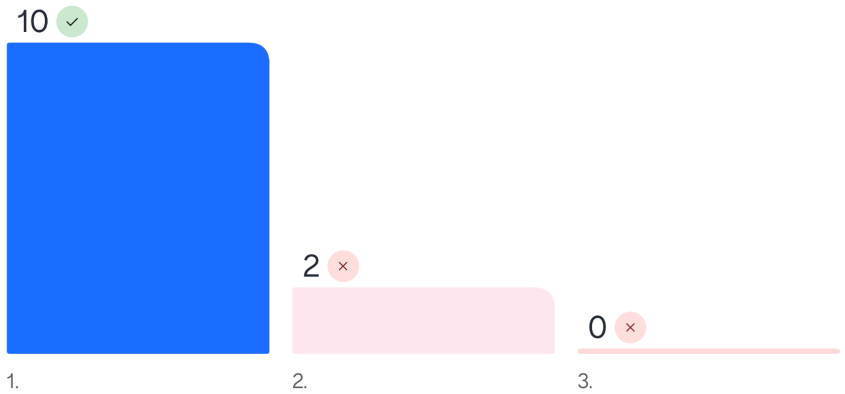
⇒ ***krefter*** i en betinget bevegelse.

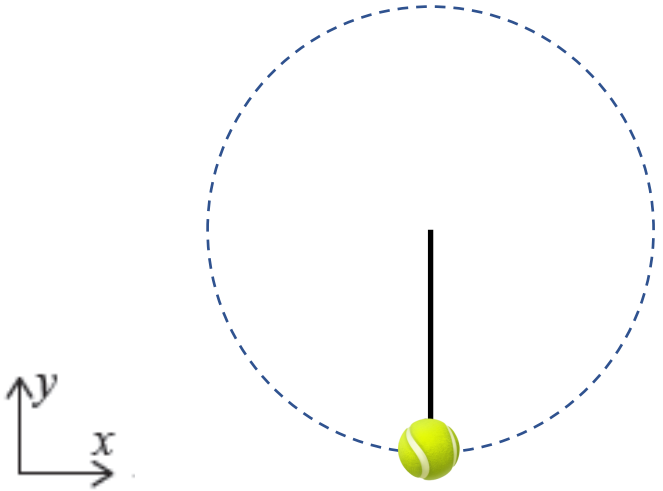
# Mentimeter Tennisball i en snor

www.menti.com kode 2861 8351

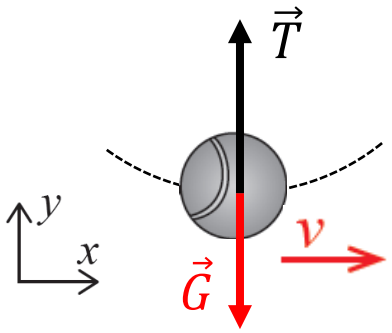
Jeg svinger en tennisball i en snor så ballen beveger seg på en ***vertikal*** sirkelbane. I det nederste punktet på banen er snordraget:

1. Større enn tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen



# Tennisball i en snor




Snordraget $\vec{T}$,
kraft fra snoren på ballen

Gravitasjon $\vec{G}$: $\vec{G} = -mg\hat{j}$

(Vi ser bort fra luftmotstand.)

N2L i y-retning: $T - G = ma_y$

Sentripetalakselerasjon mot sirkelens sentrum: $a_y = \frac{v^2}{R}$

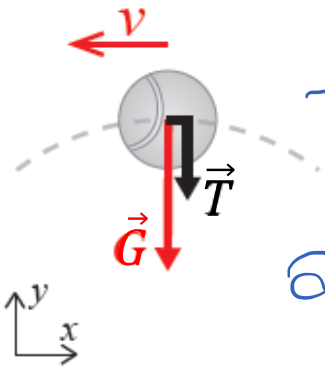
$\Rightarrow T - G = m\frac{v^2}{R}$

$T = \frac{mv^2}{R} + mg > G$

Snordraget er ***større*** enn tyngden til ballen.

På toppen:

N2L:




$-T - G = ma_y$

$a_y = -\frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow -T - G = -\frac{mv^2}{R}$

$T = \frac{mv^2}{R} - mg$

Snoren kan bare dra, ikke dytte: $T > 0$

*Minimalfart* for å holde snordraget positivt!

# Takk for i dag! 😀