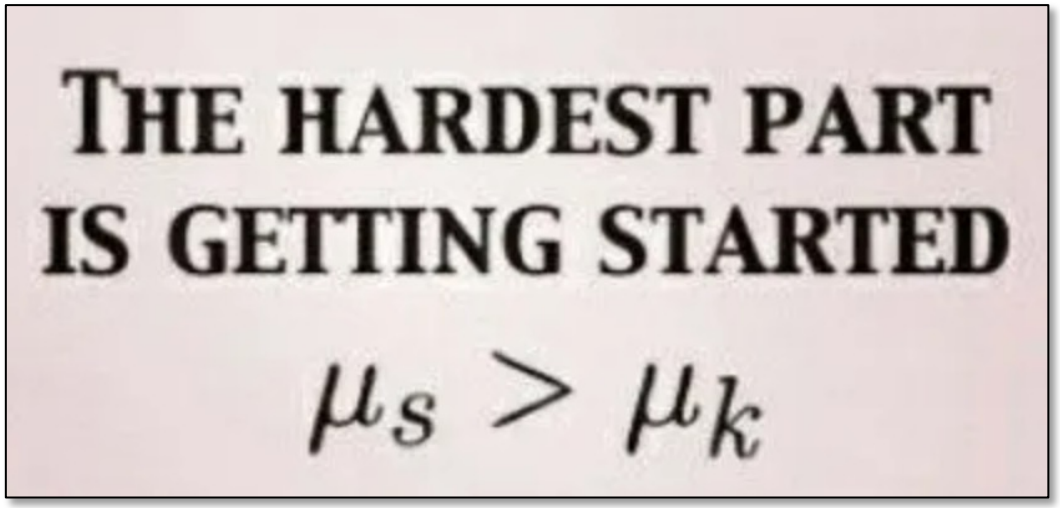
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Seminar uke 5: Friksjon, arbeid-energi-teoremet. Numerisk løsning av differensialligninger

(AMS kap. 9,10.1-10.2, noe kap. 4 (Euler- og Euler-Cromer-metoden)

Læringsmål: Vite hva statisk og dynamisk ***friksjon*** er, modeller for friksjonskraft. Vite hva arbeid og kinetisk energi er, vite hva ***arbeid-energi-teoremet*** er og hvordan det brukes. ***Numerisk integrasjon*** med Euler- og Euler-Cromer-metoden.



Tirsdag 18.02.2025

Dagens program 

Arbeid-energi-teoremet og Mentimeter-oppgaver

Vi starter med å utlede arbeid-energi-teoremet, og så tar vi et par Mentimeter-oppgaver på arbeid og friksjon.

→ Seminaroppgave S5.3

Euler-Cromer, «Raketten»

Vi ser på numerisk integrasjon med Euler- og Euler-Cromer-metoden. Vi ser så på seminaroppgave 5.2a) sammen (datafilen «therocketdata.txt» ligger på semestersiden). Denne oppgaven gir en fin øvelse til eksperiment 1 neste uke 👍

Deretter jobber dere med resten av ukas seminaroppgaver 😊

Kinetisk energi og arbeid

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Newtons andre lov i en dimensjon:

$$\sum F_x = F_{net,x} = ma_x = m\frac{dv_x}{dt} \quad | \cdot v_x$$

$$F_{net,x} \cdot v_x = m\frac{dv_x}{dt} \cdot v_x = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)$$

Produktregelen:

$$\frac{d}{dt}(v_x \cdot v_x) = \frac{dv_x}{dt}v_x + v_x\frac{dv_x}{dt} = 2\frac{dv_x}{dt}\cdot v_x$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dt}\cdot v_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)$$

Integrerer:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{net,x}\cdot v_x\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_x^2\right]dt = \frac{1}{2}mv_x^2(t_1) - \frac{1}{2}mv_x^2(t_0)$$

Definerer **kinetisk energi**:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Arbeid utført av kraften $F_{net,x}$ mellom tid t_0 og t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{net,x}(t,x,v)\cdot v_x\,dt \equiv W_{0,1}$$

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

Arbeid er ***tilført mekanisk energi***.

Arbeid-energi-teoremet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi trenger fortsatt hastigheten $v(t)$ for å beregne arbeidet:

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net}(t, x, v_x) v_x dt$$

Hvis kraften er *bare* posisjonsavhengig og ikke hastighetsavhengig:

$$F_x^{net}(t, x, v_x) \rightarrow F_x^{net}(x(t))$$

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net}(x) \cdot v_x dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{net}(x) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F_x^{net}(x)\, dx$$

Eksempler:

- gravitasjon
- fjærkraft

Arbeid-energi-teoremet: (for en kraft som kun er posisjonsavhengig)

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x^{net}(x)\, dx = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Vi måler energi og arbeid i Joule: 1 J = 1 Nm = 1 kg m^2/s^2 👍

Mer om arbeid-energi-teoremet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Arbeid-energi-teoremet: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

Alternativ formulering av Newtons andre lov
$\Rightarrow$ bare gyldig i *inertialsystemer*

Arbeid utført av ***nettokraften*** $\vec{F}^{net} = \sum_j \vec{F}_j \Longrightarrow$ summen av ***alle*** kreftene

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_j F_j\right) v\, dt = \sum_j \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} F_j \cdot v\, dt}_{= W_j} = \sum_j W_j$$

For å bruke arbeid-energi-teoremet må vi ta hensyn til ***alle*** kreftene!

Hvis kraften er *hastighetsavhengig*:

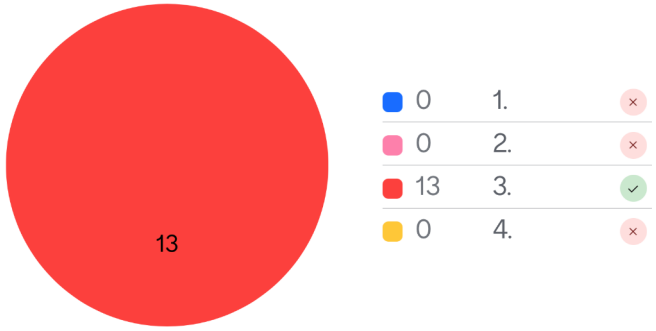
$$\int_{t_0}^{t_1} F^{net}(t, x, v) \cdot v\, dt = K_1 - K_0$$

Hvis kraften ***kun*** er posisjonsavhengig:

$$\int_{x_0}^{x_1} F^{net}(x)\, dx = K_1 - K_0$$

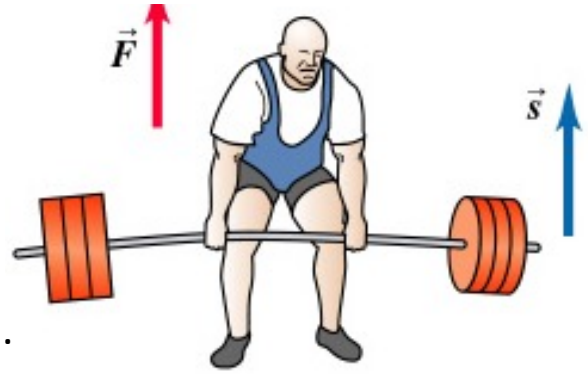
Mentimeter Vektløfteren 🏋️

www.menti.com kode 2681 4346

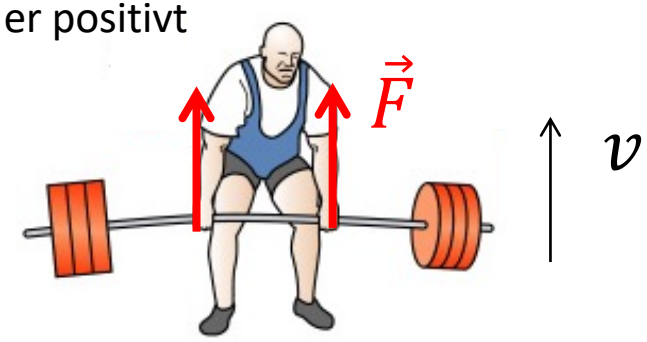


En vektløfter løfter en vekt opp fra gulvet.
Mens han løfter den:

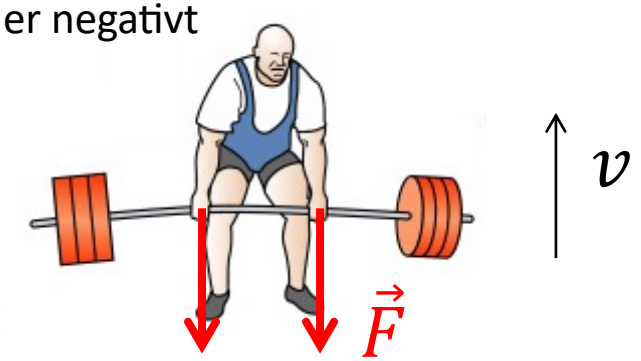
1. gjør han et positivt arbeid på vekten, og vekten gjør et positivt arbeid på ham.
2. gjør han et negativt arbeid på vekten, og vekten gjør et positivt arbeid på ham.
3. gjør han et positivt arbeid på vekten, og vekten gjør et negativt arbeid på ham.
4. gjør han et negativt arbeid på vekten, og vekten gjør et negativt arbeid på ham.



Arbeid utført av *vektløfteren* på vekten:
- kraft fra vektløfteren på vekten
- kraft og forflytning har samme fortegn
- arbeidet er positivt



Arbeid utført av *vekten* på vektløfteren:
- kraft fra vekten på vektløfteren (motkraft)
- kraft og forflytning har motsatt fortegn
- arbeidet er negativt



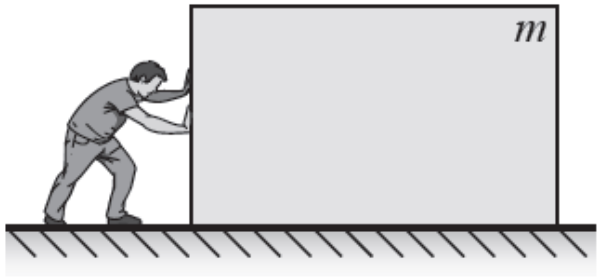
Svaralternativ 3 😎

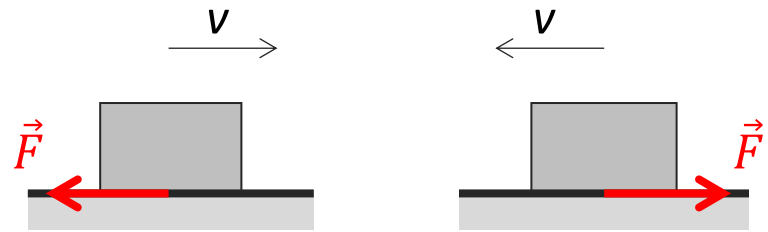
Mentimeter Skyve på en kasse

www.menti.com kode 2681 4346

Du beveger en kasse med masse *m* 1 meter til høyre, og tilbake igjen 1 meter til venstre.
Friksjonskraften er $F_d = \mu_d N$. For den totale bevegelsen gjør **friksjonskraften**:

1. Positivt arbeid på kassen.
2. Negativt arbeid på kassen.
3. Ikke noe arbeid på kassen.



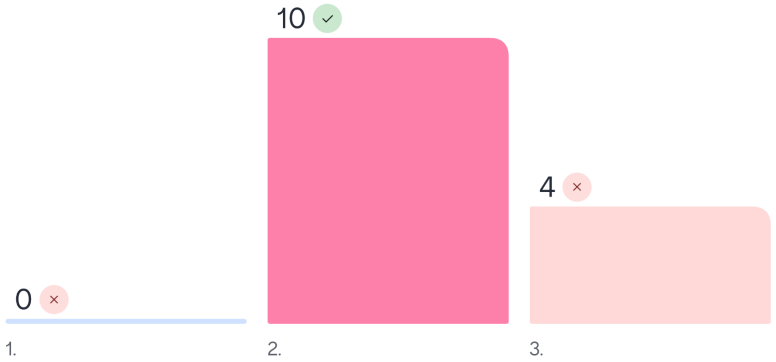


Friksjon virker alltid mot (relativ) bevegelsesretning

- arbeidet er *negativt* for bevegelsen til høyre
- arbeidet er *også negativt* for bevegelsen til venstre

Friksjonskraften er hastighetsavhengig: $\vec{F}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Kassen taper energi til omgivelsene når den beveger seg.
Systemet gjenvinner *ikke* energien ved å invertere bevegelsen.



Svaralternativ 2 😎

Numerisk integrasjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Akselerasjon er definert som: $a(t_i) \approx \frac{v(t_i+\Delta t) - v(t_i)}{\Delta t} = \bar{a}(t_i)$, lite Δt

Ganger med Δt og løser for $v(t_{i+1})$:

$$\Rightarrow v(t_{i+1}) = v(t_i+\Delta t) \approx v(t_i) + a(t_i)\cdot\Delta t$$

Gitt at vi kjenner $a(t)$ og starthastighet $v(t_0)$, så kan vi gå framover i tiden og finne hastigheten ved alle tider:

$$v(t_1) = v(t_0) + a(t_0)\Delta t$$
$$v(t_2) = v(t_1) + a(t_1)\Delta t$$
$$\vdots$$

Tilsvarende finner vi posisjonen fra hastigheten:

$$v(t_i) \approx \frac{x(t_i+\Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}, \text{ lite } \Delta t$$

$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i+\Delta t) \approx x(t_i) + v(t_i)\Delta t$$

Eulers metode og Euler-Cromer-metoden

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi har funnet en metode for å finne $x(t)$ og $v(t)$ hvis vi kjenner:

- akselerasjonen: $a(t)$
- initialbetingelser: $x(t_0), v(t_0)$

Eulers metode:

$$v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + a(t_i, x(t_i), v(t_i)) \cdot \Delta t$$

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + v(t_i) \cdot \Delta t$$

Leonhard Euler
(1707–1783)



Vi må bruke et lite Δt og mange steg for å oppnå en god presisjon.

Vi kan ofte redusere feilen med en liten forbedring:
I stedet for hastigheten i begynnelsen av tidsintervallet bruker vi hastigheten *på slutten av intervallet* for å finne posisjonen.

Euler-Cromer-metoden:

$$v(t_{i+1}) \simeq v(t_i) + a\big(t_i, x(t_i), v(t_i)\big) \cdot \Delta t$$

$$x(t_{i+1}) \simeq x(t_i) + v(t_{i+1}) \cdot \Delta t$$



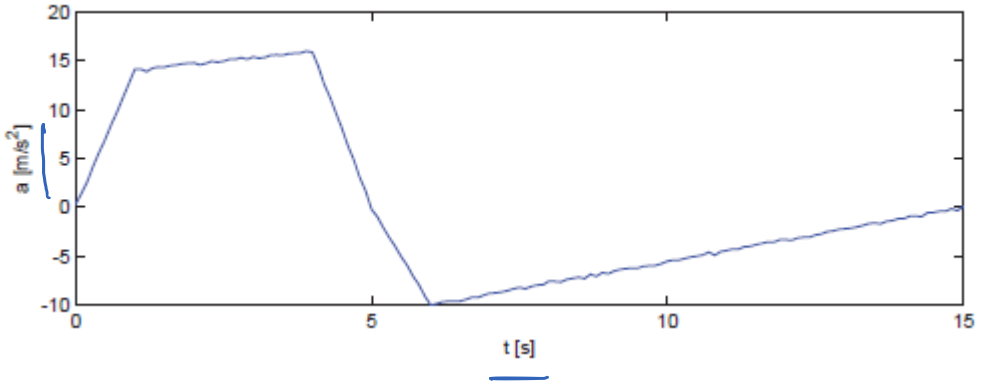
Alan H. Cromer
(1935–2005)

Eksempel: «Raketten» med numerisk integrasjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Du utvikler «Raketten», en ny attraksjon ved en fornøyelsespark.
Du har festet et akselerometer til en test-vogn for å finne hastigheten og posisjonen.

Dette er målingen din:



t [s] a [m/s²]

therocketdata.txt

1	0.0000000e+000	2.7316440e−001
2	1.0000000e−001	1.4411079e+000
3	2.0000000e−001	2.6693138e+000
4	3.0000000e−001	4.2383806e+000
5	4.0000000e−001	5.6499504e+000
6	5.0000000e−001	6.9489214e+000
7	6.0000000e−001	8.4234922e+000
8	7.0000000e−001	9.7402175e+000
9	8.0000000e−001	1.1202077e+001
10	9.0000000e−001	1.2641944e+001
11	1.0000000e+000	1.4119110e+001
12	1.1000000e+000	1.4143788e+001
13	1.2000000e+000	1.3868911e+001
14	1.3000000e+000	1.4228543e+001
15	1.4000000e+000	1.4349276e+001
16	1.5000000e+000	1.4332521e+001

Vi kjenner akselerasjonen $a(t_i)$ for $t_i = 0.0$ s, 0.1 s, 0.2 s, ...
Du kjenner initialbetingelsene, «Raketten» starter i ro:
$x(t_0) = x_0 = 0$ m, $v(t_0) = v_0 = 0$ m/s

Vi bruker Euler-metoden (eller Euler-Cromer)
med tidsintervall $\Delta t = 0.1$ s:

$$v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + a(t_i)\Delta t$$

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + v(t_i)\cdot\Delta t$$

t_{i+1}

Takk for i dag! 😀