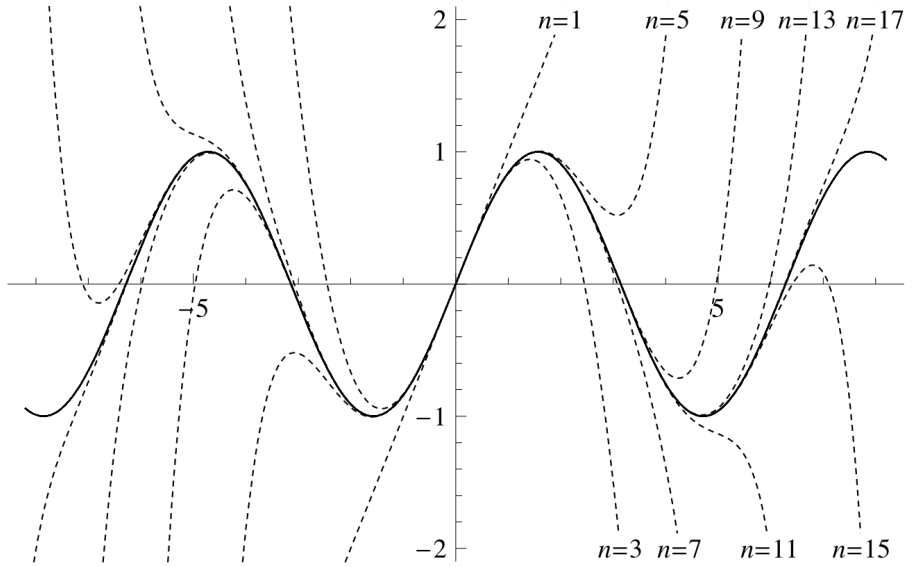
FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

Seminar uke 7: Arbeid og effekt. Potensiell energi, energi-diagrammer og likevektspunkter. Taylorrekker, 2.ordens diff-ligninger

(AMS 10.5, 11.3, Kalkulus 11.1, 11.2, 12.8 (Taylor), 10.5 (diff-lign.), AMS 9.3.2, 5.7)

Læringsmål: Vite hva ***effekt*** er, kunne lese av og bruke ***energidiagrammer,*** finne **likevektspunkter.** Bruke ***Taylorrekker*** (Taylorpolynomer) for å tilnærme funksjoner. Lære om ***analytisk løsning av diff-ligninger*** i forbindelse med ***svingefenomener.***



3Blue1Brown-video
(takk til Tor Ole 😊)

Tirsdag 04.03.2025

Dagens program 

Fortsettelse fra forelesning i går, deretter seminaroppgaver.

Vi ser videre på pendelbevegelse og også en kloss i en fjær:

analytisk løsning av 2. ordens differensialligninger.

Seminaroppgavene ligger på semestersiden (Undervisningsplan uke 7)

Eksperiment 1: Akselerasjonen i en heis (for de som ikke har gjort eksperimentet ennå)

- Teksten finner dere på Canvas og på semestersiden (undervisningsplanen, uke 06).
- Spør om hjelp underveis om dere står fast på en oppgave.
- Jobb gjerne sammen om oppgavene (≈2-4 studenter).
- Når dere er ferdig tar dere kontakt med en av oss faglærere, som går igjennom det dere har gjort sammen med dere. Vi vil så godkjenne eksperimentet, eller fortelle hva dere må rette opp for å få godkjent.

Eksempel: pendelen på Fysisk institutt

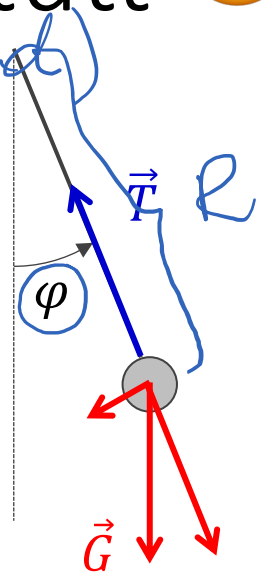
[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

(Ser bort fra luftmotstand)

$v = R\omega$

Tangentiell akselerasjon:

$$a_t = -g\sin\varphi = R\alpha = R\frac{d\omega}{dt}$$





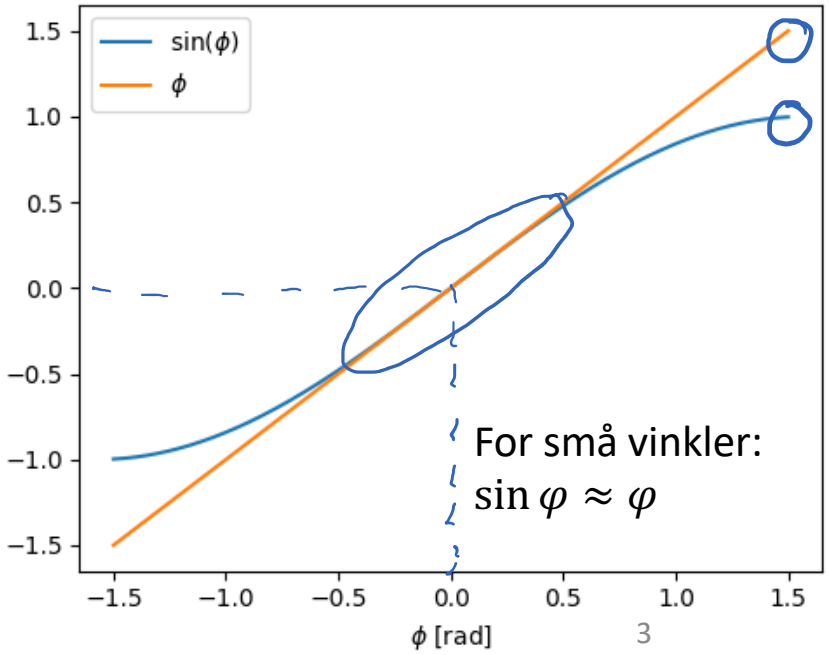
Differensialligning: 2. ordens, homogen diff-lign:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$$

Utvikler $\sin\varphi$ i en Taylorrekke (gjelder for *små* vinkler):

$$\sin\varphi \approx \sin(0) + \frac{1}{1!}(\varphi - 0)^1\cos(0) + \dots$$

$$= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$



Tilnærming for *små* vinkler:

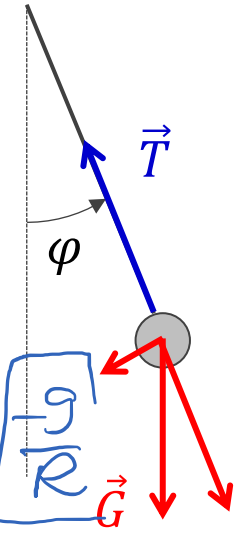
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$$

Fellesoppgave: pendelen, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0}$





Vi følger oppskriften fra formelarket:

$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0$

Kar.lign: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

I vårt tilfelle: $p = 0$, $q = \frac{g}{R}$

$\lambda^2 = -q = -\frac{g}{R} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{g}{R}}$

Formelark: $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $a = 0$, $b = \sqrt{\frac{g}{R}}$

To komplekse røtter: $\lambda_1 = +i\sqrt{\frac{g}{R}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{R}}$

$\Rightarrow \varphi(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$ Generell løsning

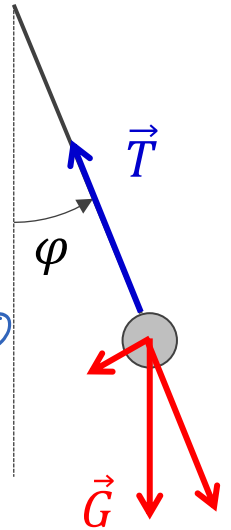
Naturlig (egen-) frekvens $f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$, $\omega_e = \sqrt{\frac{g}{R}}$

Fellesoppgave: pendelen, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Differensialligning: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$, $\omega_e = \sqrt{\frac{g}{R}}$



$\varphi(t) = C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sin(\omega_e t)$

Vi finner konstantene fra initialbetingelsene:

Ved $t=0$s: maks utslag φ_0, momentant i ro

Setter inn: $\varphi(t=0) = C_1\cos(0) = C_1 = \varphi_0$

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = \left[-C_1\omega_e\sin(\omega_e t) + C_2\omega_e\cos(\omega_e t)\right]_{t=0} = C_2\cdot\omega_e = 0$$

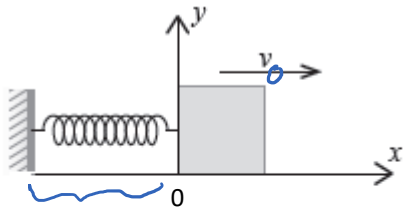
$\Rightarrow C_2 = 0$ siden $\omega_e \neq 0$

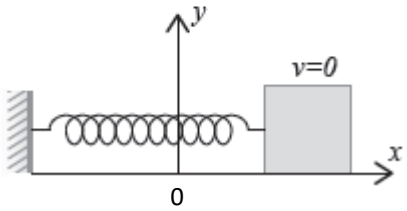
Spesiell (partikulær) løsning:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_e t) = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

Eksempel: fjærkraft

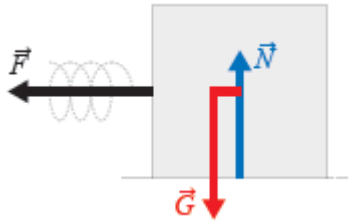
En masse m = 1 kg er festet til ei fjær med fjærkonstant k = 100 N/m og kan bevege seg på et bord uten friksjon og luftmotstand. Massen beveger seg med v_0 = 1 m/s ut fra likevektsposisjonen.





Kontaktkrefter:
- kraft F fra fjæra på massen
- normalkraft N fra bordet på massen

Langtrekkende kraft:
- gravitasjonskraft G



Normalkraft kompenserer gravitasjon: $\vec{N} = -\vec{G}$
$\Rightarrow$ ingen bevegelse i y-retning.

Kraft F fra fjæra på massen: Hookes lov:

$$F(x) = \pm k\Delta x$$

Vi definerer $x = 0$ i likevektsposisjon; hvis $x > 0$ trekker kraften i *negativ* x-retning: $F(x) = -kx$

Initialbetingelser: $x(t=0) = 0\,m$, $v(t=0) = v_0 = 1.0\,m/s$

N2L: $\sum F_x = F(x) = -kx = ma$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

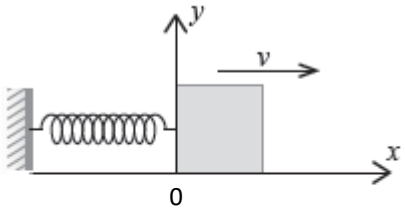
2. ordens homogen diff.lign

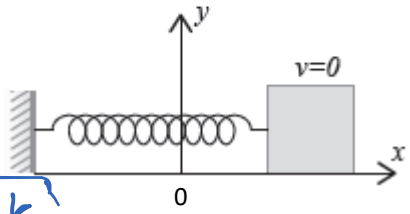


Fellesoppgave: fjærkraft, analytisk løsning

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

N2L: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$





Initialbetingelser:

$x(t_0) = 0$ m

$v(t_0) = 1$ m/s

Vi følger oppskriften fra formelarket:

$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{p}_{=0}\frac{dx}{dt} + \underbrace{q}_{k/m}x = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m}, \lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$

Kar. lign: $\lambda^2 + 0 + \frac{k}{m} = 0$

To komplekse røtter: $\lambda_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}, \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Generell løsn: $x(t) = C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sin(\omega_e t)$

Fra initialbet.: $x(t=0) = C_1 = x_0 = 0$. $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = C_2\omega_e = v_0$

$\Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_e}$

Partikulær løsn: $x(t) = \frac{v_0}{\omega_e}\sin(\omega_e t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

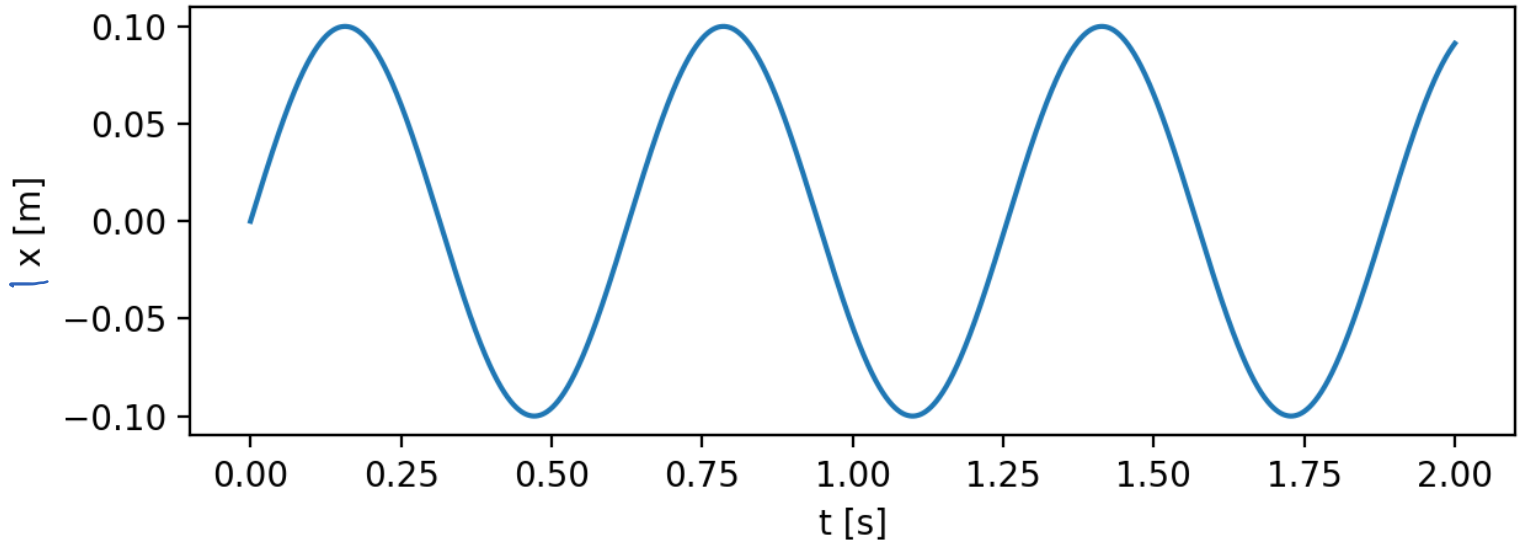
Svingefrekvens $\omega_e/2\pi$:
stiv fjær eller liten masse ⇒ rask svingning

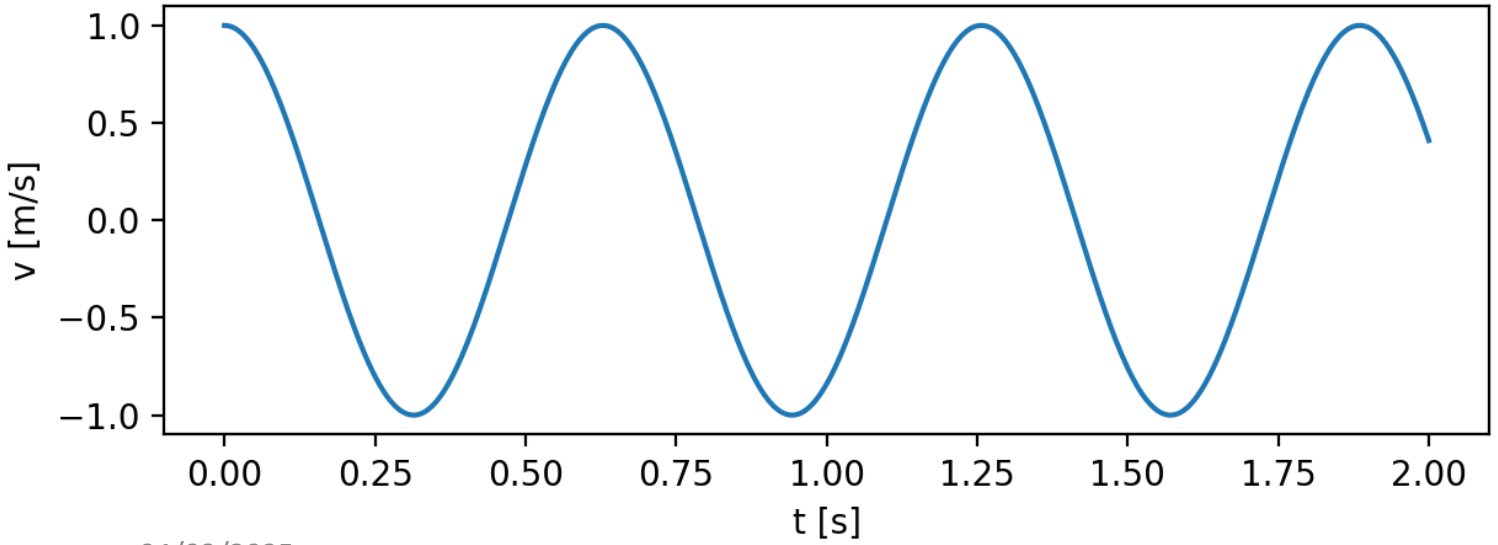
Amplitude A: C_2
høy initialhastighet ⇒ stor amplitude

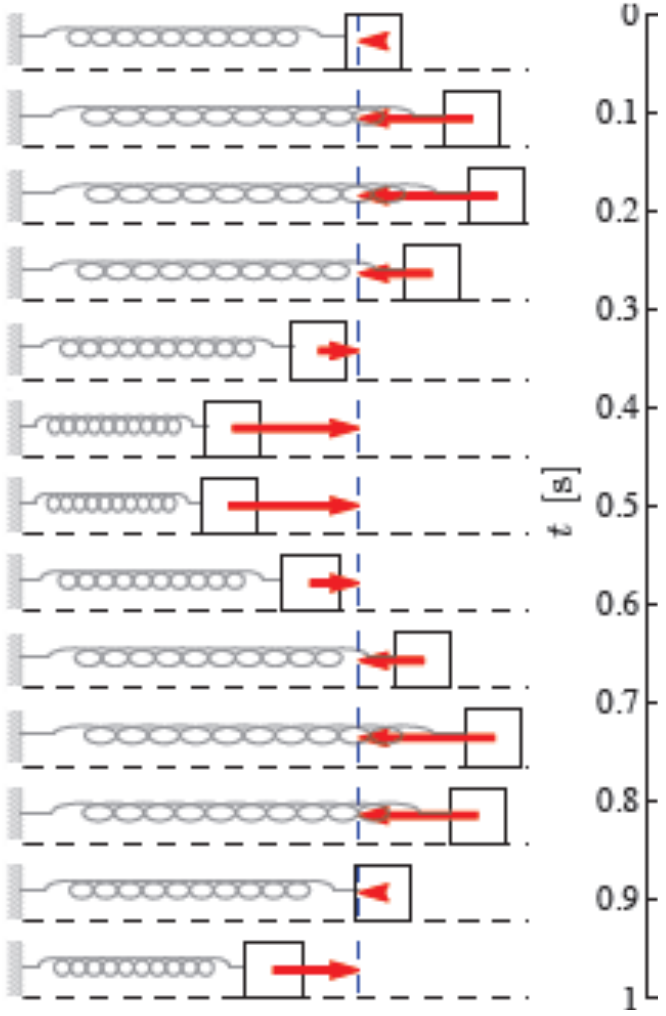
Fjærkraft, svingning (harmonisk oscillator)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t)$$







Takk for i dag! 😀