# FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

## Seminar uke 8: Numerisk derivasjon og integrasjon

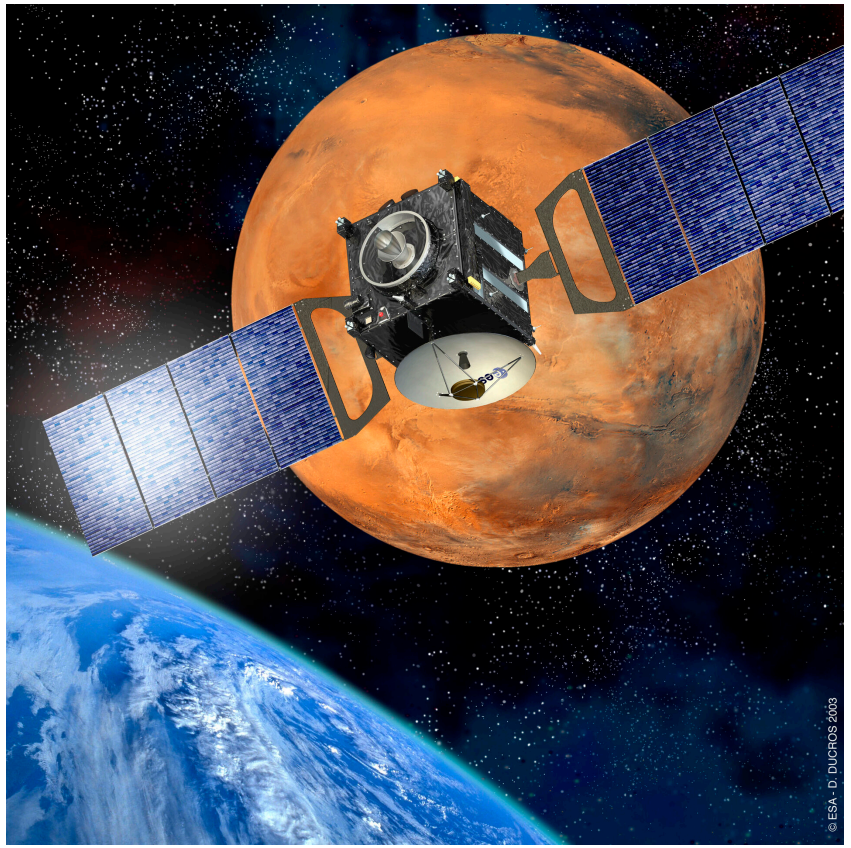
(AMS ~~11.4~~, 6.2, 7.5) + 10.3 side 278 + 7.6.1

**Læringsmål**: Vite hva **numerisk derivasjon** og **integrasjon** er og hvordan det brukes i praksis. Se på betydningen av størrelsen på ***tidsintervallet***.

### Beskjeder:

- ✓ Fint og nyttig notat fra Joakim Bergli på numerisk derivasjon og integrasjon: trunkeringsfeil (Taylors formel med restledd) og avrundingsfeil (numerisk presisjon) legges ut på semestersiden 😊
- ✓ Ekstragruppa på fredag 08:15-10:00 Tidrommet: «regneverksted» med sjokolade og smågodt 🍫🍬
- ✓ Midtveisundersøkelse (nettskjema) legges ut i Canvas i slutten av uka

Tirsdag 11.03.2025




Mars Express 💜
https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Mars_Express

# Dagens program 

**Fortsettelse fra forelesning i går, deretter seminaroppgaver.**

Vi ser videre på numerisk integrasjon:

- Trapesmetoden
- Numerisk løsning av 2. ordens differensialligninger: bevegelsen til en bordtennisball

Seminaroppgavene ligger på semestersiden (Undervisningsplan uke 8)

Til S8.1

# Numerisk integrasjon med trapesmetoden

AMS 10.3 s. 278

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Vi ønsker å integere $\int_{X_A}^{X_B} F(x)\,dx$

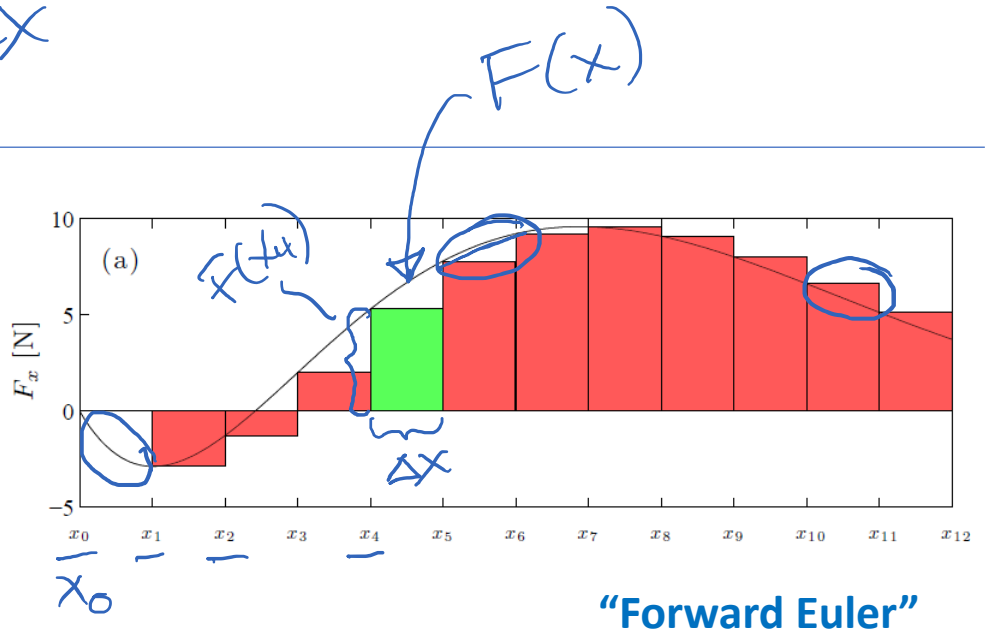
Vi deler intervallet i *n* små intervaller:

$$\Delta X = \frac{X_B - X_A}{n}$$

$$X_0 = X_A$$
$$X_1 = X_A + \Delta X$$
$$X_2 = X_A + 2\Delta X$$
$$\vdots$$
$$X_i = X_A + i\,\Delta X$$

Tilnærmer:

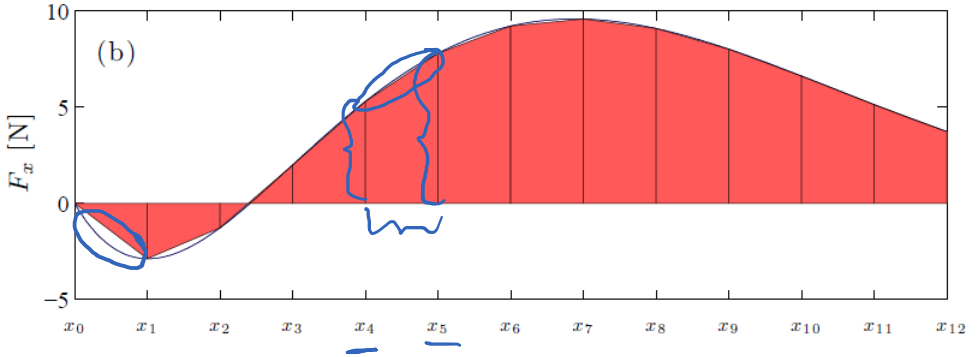
$$\int_{X_A}^{X_B} F(x)\,dx \to \sum_{i=0}^{n} F(x_i)\,\Delta X$$




**"Forward Euler"**

*Bedre* tilnærming enn et rektangel: **trapesmetoden** 👍

$$\int_{X_A}^{X_B} F(x)\,dx \to \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[F(x_i) + F(x_{i+1})\right]\cdot \Delta X$$



# En bordtennisball blir kastet på skrå mot bakken 🏓

Hva skjer *etter* at ballen treffer bakken? 🤔



# Hva skjer *etter* at ballen treffer bakken? 🤔

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

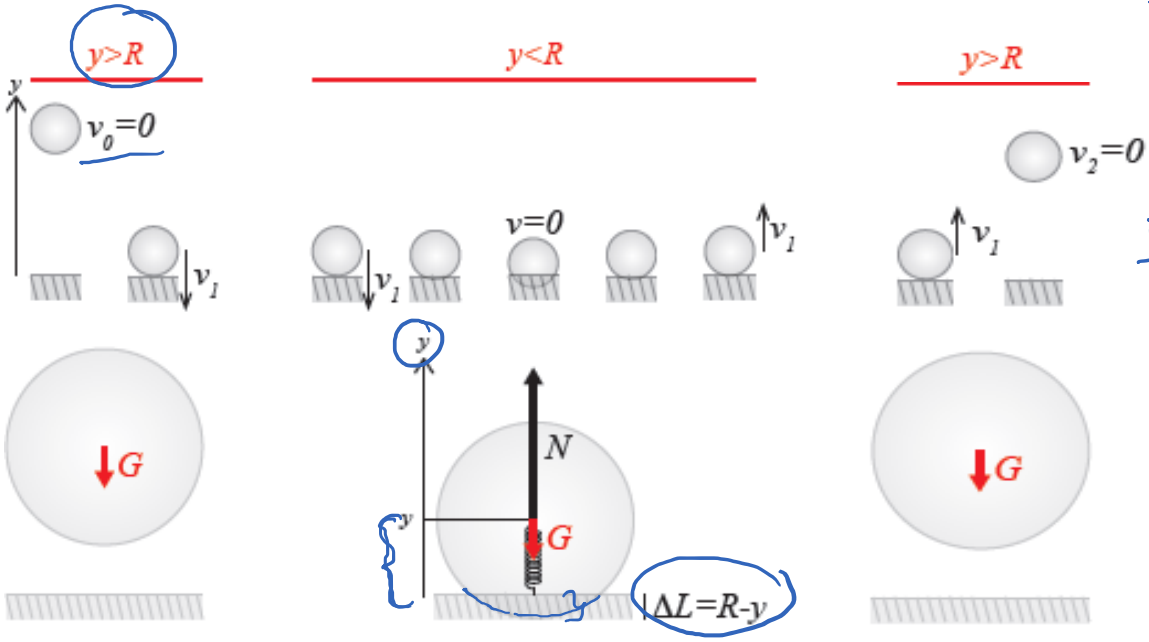
$y(t)$: posisjon til massesenteret

$R$: radien til ballen

Ball som spretter fra gulvet i én dimensjon.

Normalkraften oppstår hvis: $y < R$

Ballen deformeres
⇒ vi modellerer normalkraften som en fjærkraft:




$$\vec{N} = \pm k \Delta L \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \begin{cases} +k(R-y(t))\hat{j}, & y(t) < R \\ \vec{0}, & y(t) \geq R \end{cases}$$



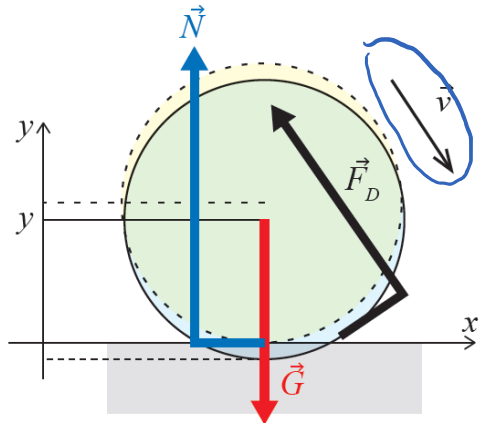
Normalkraften virker alltid vertikalt oppover *uansett* i hvilken retning ballen beveger seg.

# Fellesoppgave: bordtennisball

**Frilegemediagram**:

Kontaktkrefter:
- luftmotstand
- normalkraft

Langtrekkende kraft:
- gravitasjon




Alle (ytre) krefter har årsak i omgivelsene og virker på objektet (=ballen)

**Kraftmodeller**:

luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ — fra luften på ballen, hastighetsavhengig, mot bevegelsesretning

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\big(R - y(t)\big)\hat{\jmath} & y < R \\ \vec{0} & y \geq R \end{cases}$ — fra gulvet på ballen, posisjonsavhengig, oppover (vinkelrett på gulvet)

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{\jmath}$ — fra jorden på ballen, konstant, nedover (mot jordens sentrum)

(Vi ser bort fra friksjon mellom ballen og gulvet.)

# Fellesoppgave: bordtennisball (numerisk)

Luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

Normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\big(R - y(t)\big)\hat{\jmath} & y < R \\ \vec{0} & y \geq R \end{cases}$

Gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{\jmath}$

N2L: $\vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_D + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

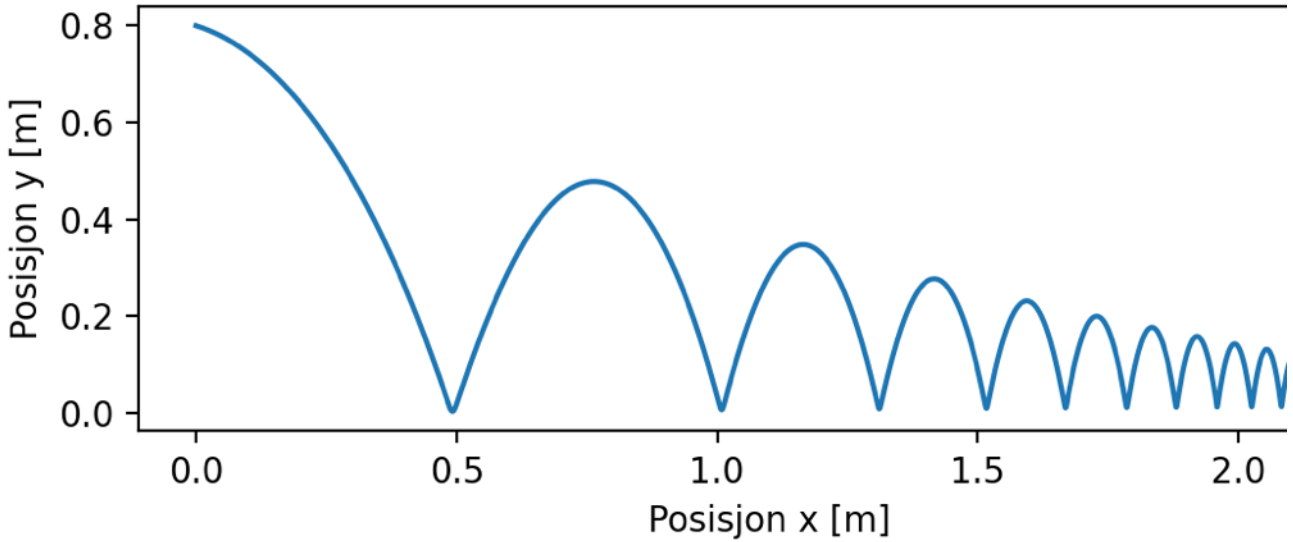
```
F_D = -D*np.linalg.norm(v[i, :])*v[i, :]
```

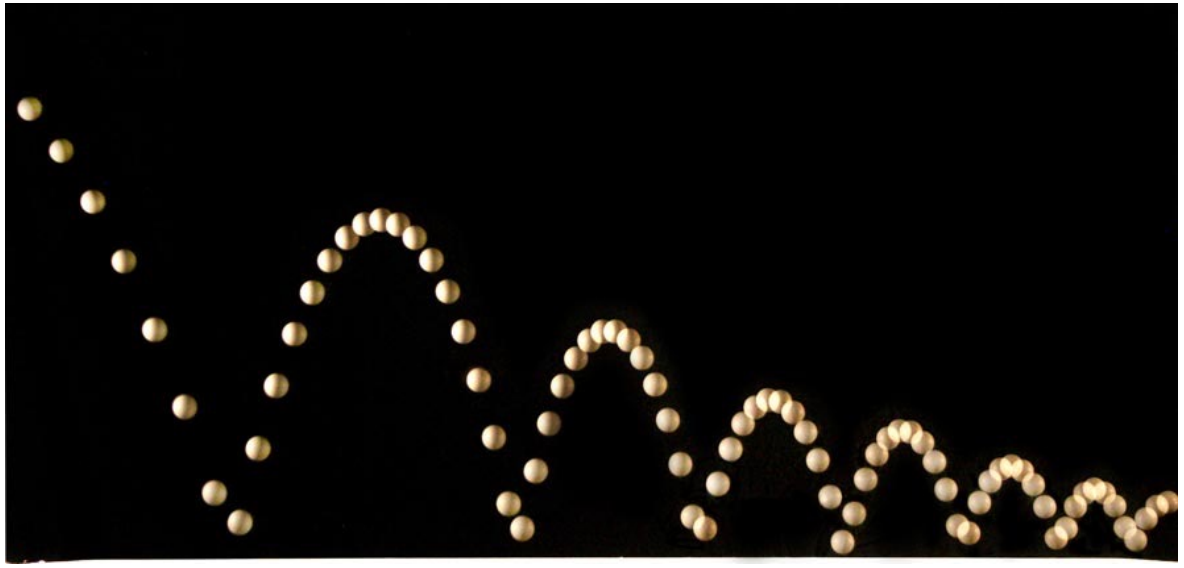
```
if r[i, 1]<R:
    F_N = k*(R-r[i, 1])*np.array([0, 1])
else:
    F_N = [0, 0]
```

```
F_G = -m*g*np.array([0, 1])
```

```
Fnet = F_N + F_D + F_G
a[i, :] = Fnet/m
```

# Resultater, bordtennisball 🏓 (numerisk)



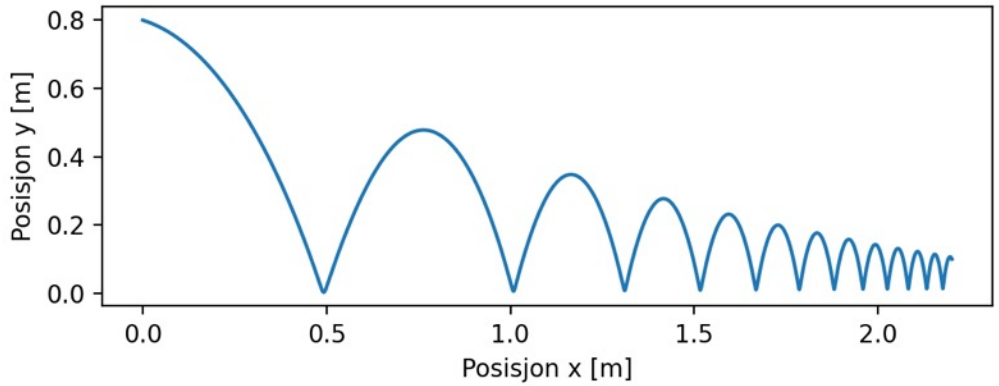
Ikke perfekt:

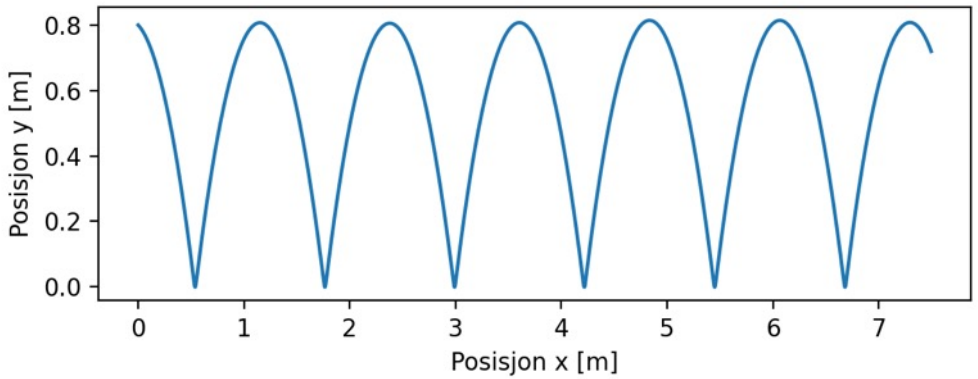
- Ingen dempning i fjærkraften
- Ingen friksjon
- (Ingen rotasjon)

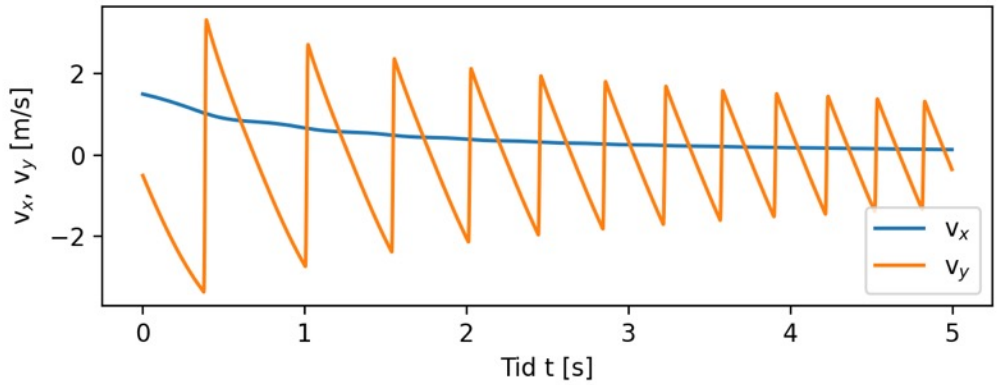
Men ikke så helt galt heller 😀

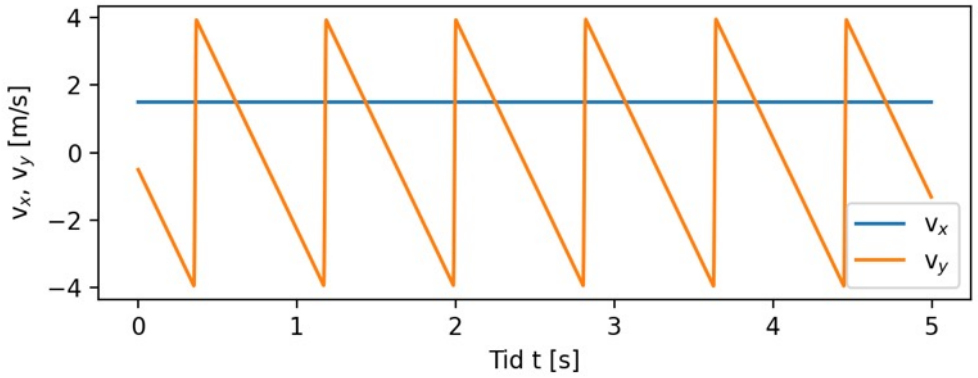
# Resultater, bordtennisball (numerisk)

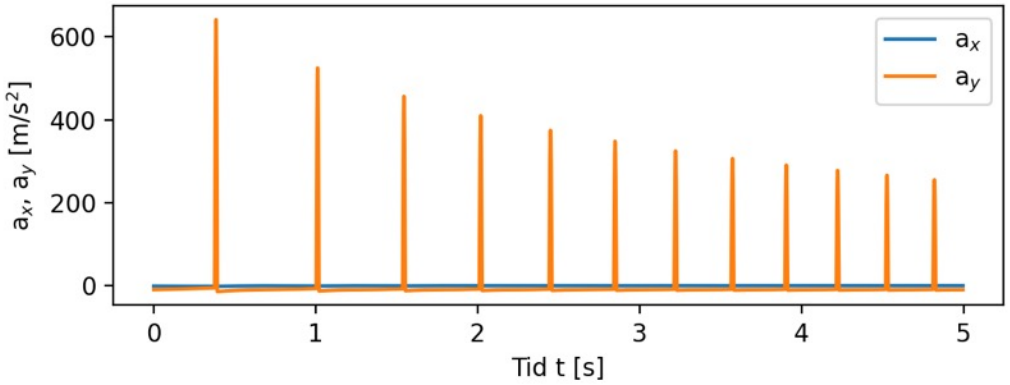
*Dempet* bevegelse i x- og y-retning → skyldes luftmotstanden

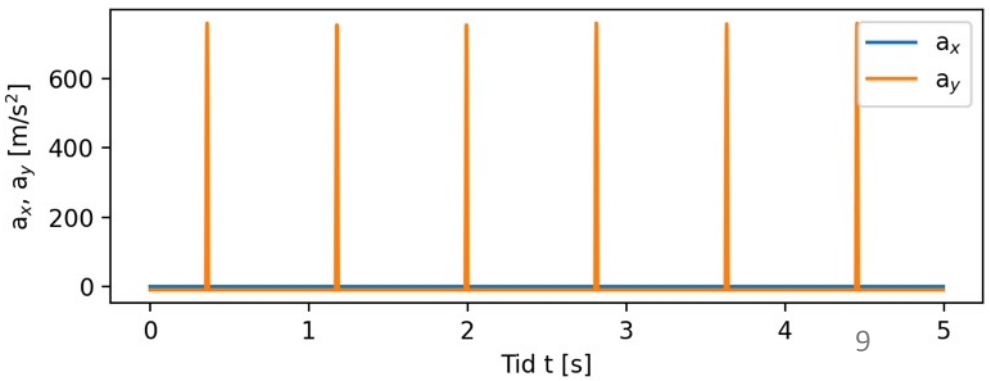


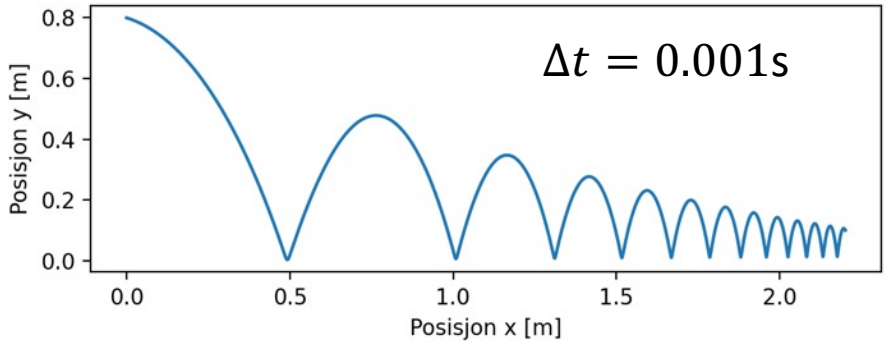



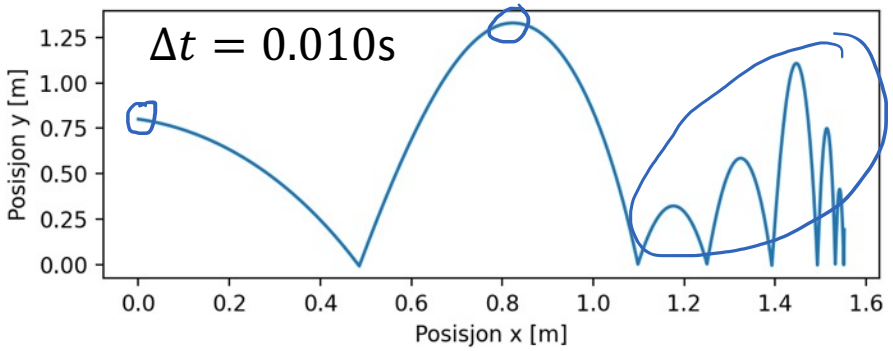



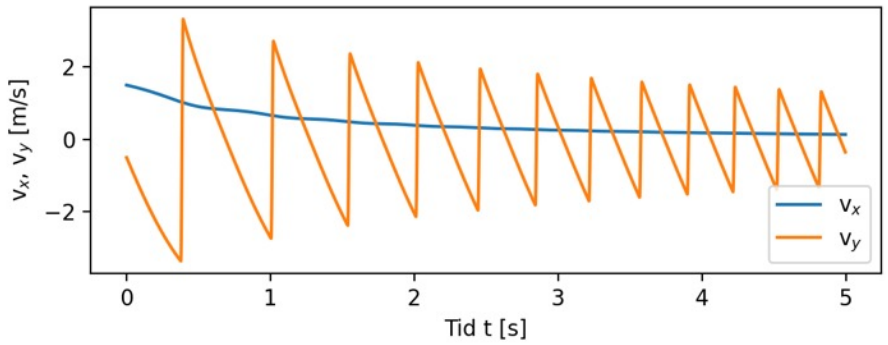



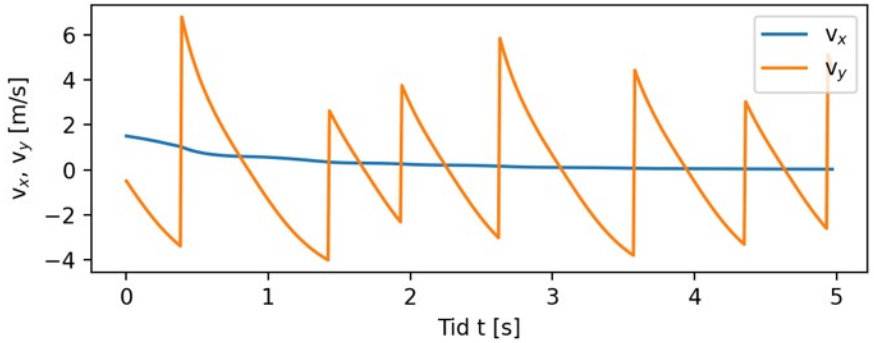



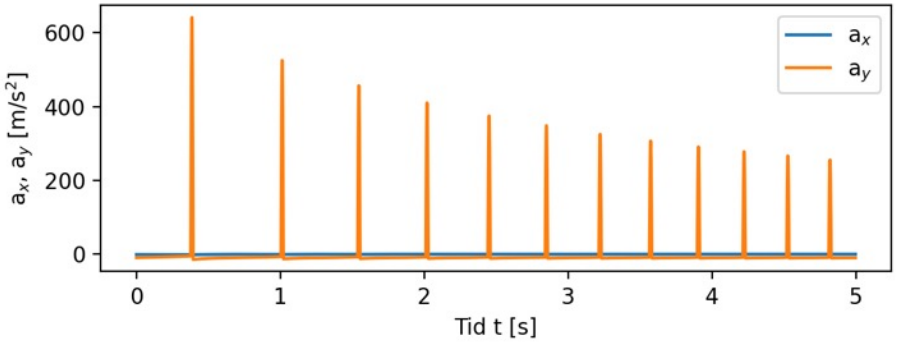
# Hva med valg av størrelsen på tidsintervallet? 🤔

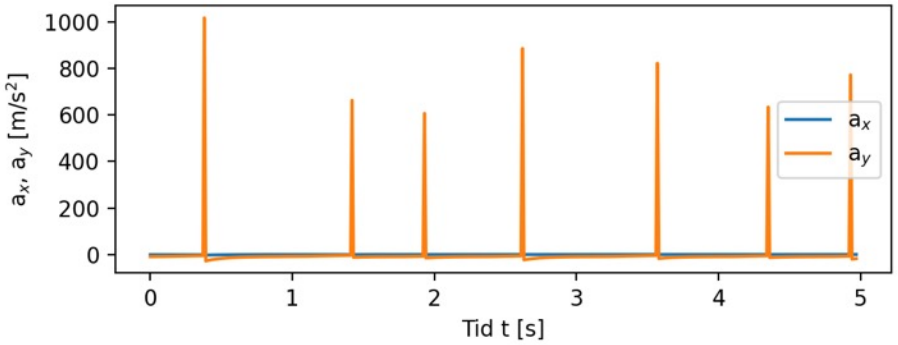


# Mentimeter Tidsintervallet for ballen 🏓

www.menti.com kode 7342 5842

Hvorfor går det galt om vi bruker et for stort tidsintervall?



# Hva er det som skjer? 🤔

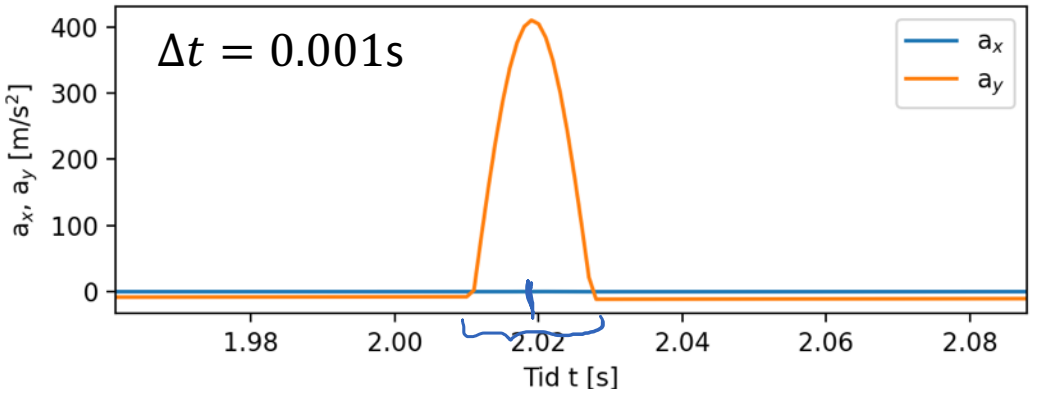
Kontakt med bakken:
Normalkraften er **stor** og virker i et **kort** tidsintervall.
Store forandringer i $v_y$ *og* $a_y$.

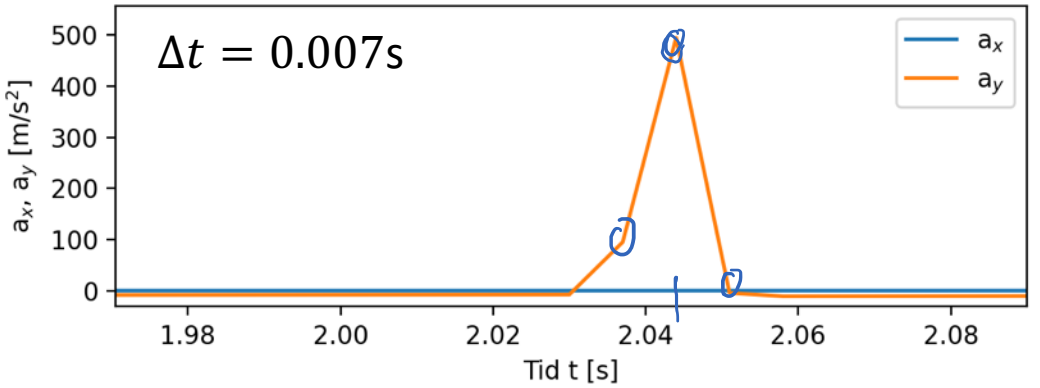
Bevegelse gjennom lufta:
jevn uten brå endringer ($v_x$,$a_x$).

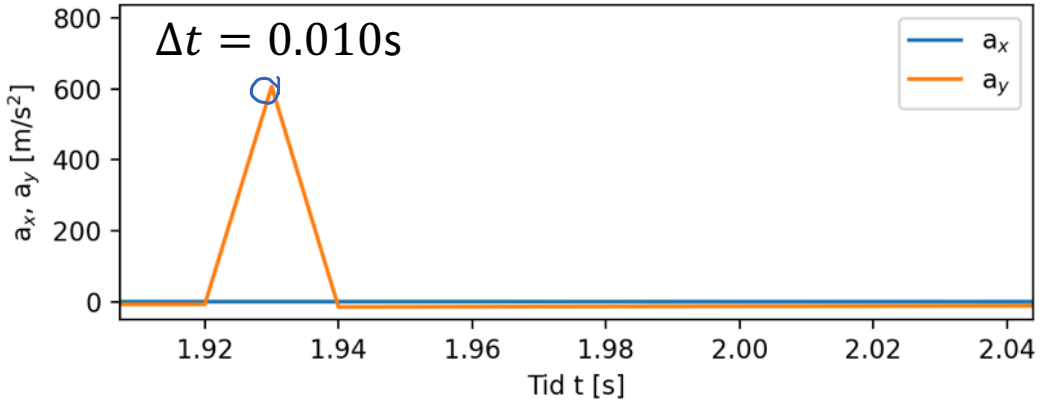
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

For ***små*** tidsintervaller $\Delta t$:

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



# Takk for i dag! 😀