# FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025

## Seminar uke 9: Kollisjoner, driv, og impuls. Rakettligningen.

(AMS kap. 12.1-12.5, 12.7)

**Læringsmål**: Bruke ***driv*** og ***impuls*** for å beskrive ***kollisjoner***. Vite hva ***rakettligningen*** er og hvordan den brukes.



Photo credit: NASA/ Kenny Allen KSC-2009-5959

Tirsdag 25.03.2025

# Dagens program 

**Fortsettelse fra forelesning i går, deretter seminaroppgaver.**

Vi skal se på:

- Fullstendig uelastisk kollisjon
- En fellesoppgave
- Rakettligningen

Seminaroppgavene ligger på semestersiden (Undervisningsplan uke 9)

# Repetisjon fra forrige gang 😄

**Driv (bevegelsesmengde)**: $\vec{p} = m\vec{v}$

Newtons andre lov: $\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

(Hvis $\frac{dm}{dt} = 0$)

***Kollisjoner***:

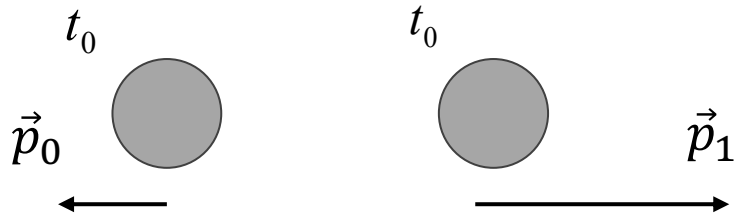
- Elastisk kollisjon (mekanisk energi bevart, $r = 1$)
- Uelastisk kollisjon (tap av mekanisk energi, $0 < r < 1$)
- Fullstendig uelastisk kollisjon (totalt tap av mekanisk energi, $r = 0$)

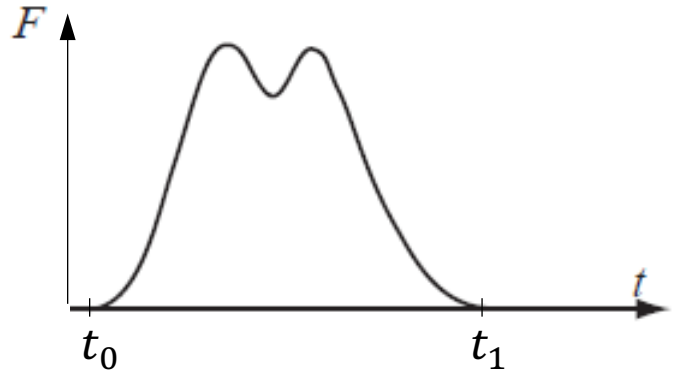
***Bevaring av bevegelsesmengde for et isolert system av objektene A og B (kun indre krefter virker)***:

$\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p}_A + \vec{p}_B =$ konstant

***Impuls***: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

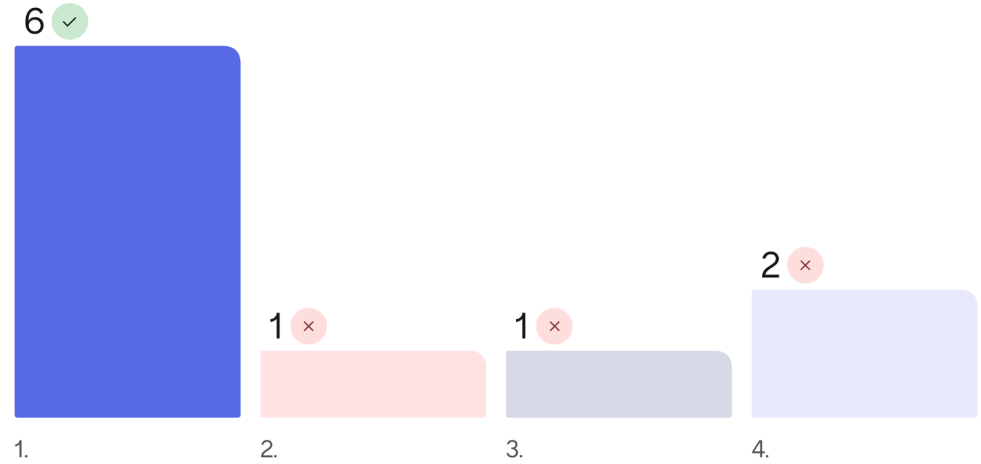


# Mentimeter Bilkrasj 🚙🚙

www.menti.com 1642 0521




To identiske biler kjører med samme hastighet. Den første krasjer i en betongvegg, den andre i tønner fylt med sand. I hvilket tilfelle er gjennomsnittskraften på bilen *størst*?

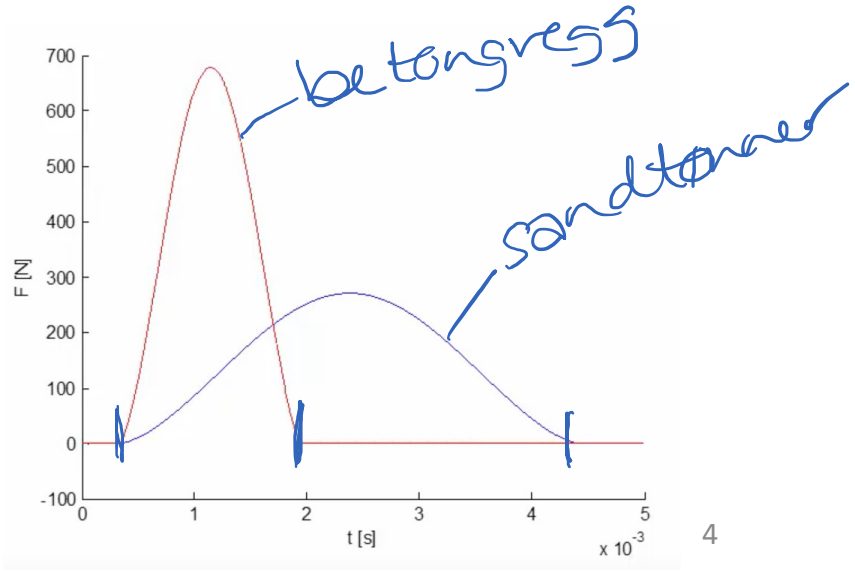
1. Tilfelle 1 (betongvegg)
2. Tilfelle 2 (sandtønner)
3. Kraften er den samme i begge tilfeller.
4. Trenger mer informasjon om kreftene for å avgjøre.



Sandtønner: krasjet tar mer tid! (Og over en lengre strekning)

Impuls:

$$\vec{J} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt \approx \vec{F}_{ave}(t_1 - t_0) = \vec{F}_{ave}\Delta t$$




Impulsen er den samme ⇒ *gjennomsnittskraften* er *mindre for sandtønnene*

# Eksempel: bilkrasj 🚙🚙

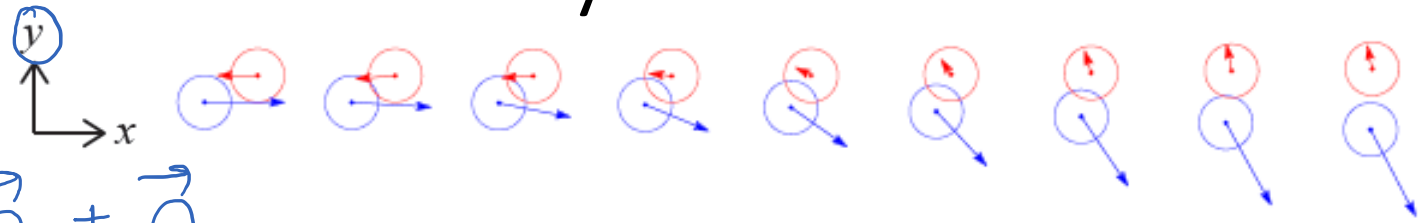




# Kollisjon hvor det virker en ytre kraft



[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




[Piler: bevegelsesmengde]

**Eksempel**: gravitasjon,
to tennisballer A og B

Totalt driv: $\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_B$

Impuls:

$$\Delta\vec{P} = \vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{ext}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (-m_A g - m_B g)\,\hat{j}\,dt = -(m_A + m_B)\,\hat{j}\,g\,(t_1 - t_0)$$

Impulsen fra den ytre kraften er avhengig
av ***varigheten*** til kollisjonen:

$$t_1 - t_0 = \Delta t \longrightarrow 0 \Rightarrow \Delta\vec{P} = \vec{J} \longrightarrow \vec{0}$$

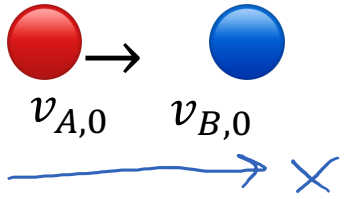
$\Longrightarrow$ Bevegelsesmengden er bevart i en kollisjon som er ***momentan***

**Definisjon på en kollisjon**: en prosess mellom to eller flere legemer

- hvor ***indre krefter*** er ***mye større*** enn ytre krefter fra omgivelsene
- som varer en ***kort tid*** i forhold til tidsskalaen av hele bevegelsen

# Fullstendig uelastisk kollisjon, to plastilinakuler

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]




Kulene henger sammen etter kollisjonen

Vi antar at kule B er i ro: $v_{B,0} = 0$ (for koll.)

Bevaring av bevegelsesmengde: $m_A v_{A0} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (m_A + m_B) v_1$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A0}$$

Kinetisk energi: Før kollisjonen: $K_0 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2$

Etter kollisjonen:

$$K_1 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} v_{A0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B} = K_0 \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

Hvis $m_A \gg m_B$: $K_1 \approx K_0 \frac{m_A}{m_A} = K_0$ !

Hvis $m_A \ll m_B$: $K_1 = K_0 \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B} \approx 0$ !

≈Ikke mek.energitap

Mekanisk energi (nesten) fullstendig tapt

**Hvor er energien?** 🤔

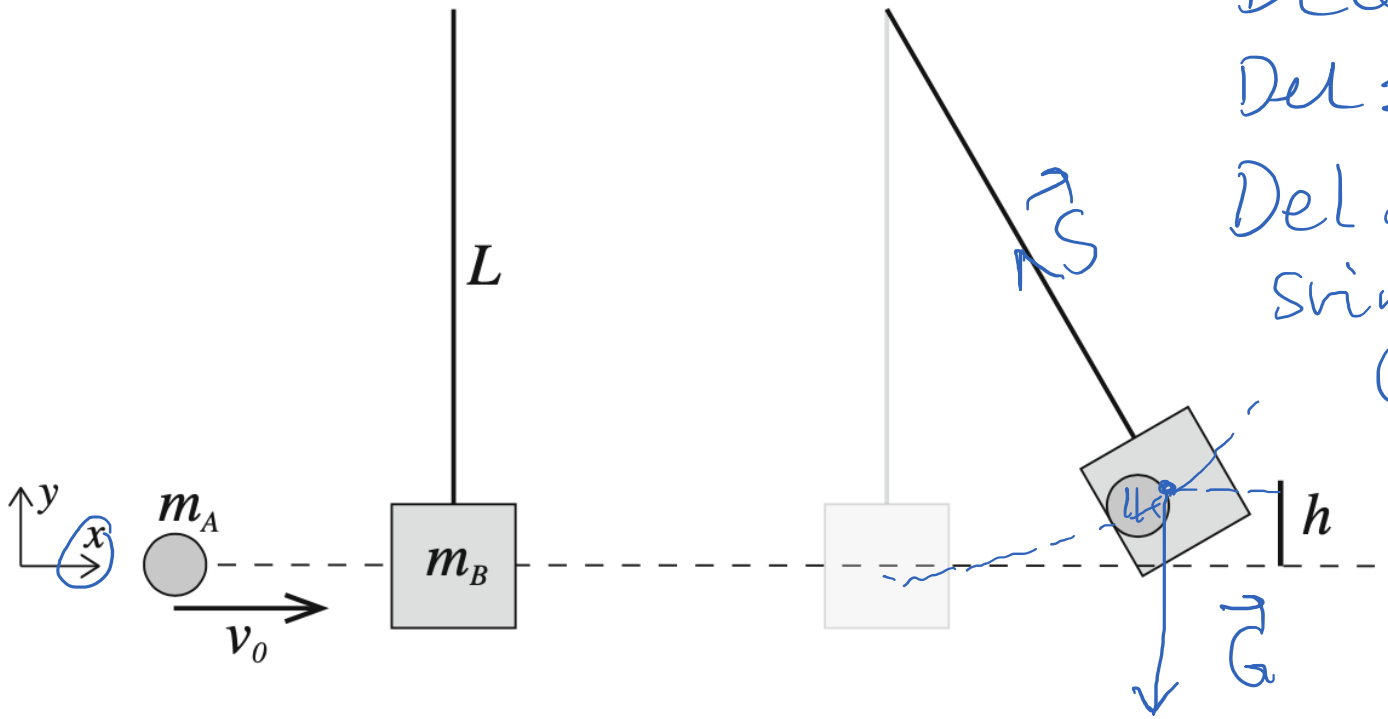
Deformasjon! (og lyd, varme, ...)

# Fellesoppgave: ballistisk pendel

Ei kule med masse $m_A$ = 10 g skytes horisontalt inn i en trekloss med masse $m_B$ = 1.0 kg. Klossen henger i ei masseløs snor med lengde $L$ = 1.0 m. Kula fester seg inne i treklossen, og de svinger opp. Klossen (med kula inni) når en høyde $h$ = 30 cm over initialhøyden sin. VI ser bort fra luftmotstand.

a) Hva var kulas initialhastighet $v_0$?

b) Hvor stort var tapet av mekanisk energi i systemet kule + trekloss?




Dele opp bevegelsen:
Del 1: Kollisjonen ($\vec{p}$ bevart)
Del 2: Systemet svinger opp (mek. energi bevart)

# Fellesoppgave: ballistisk pendel

a) Hva var kulas initialhastighet $v_0$?

Del 1 Kollisjonen. $\Delta t \to 0$, x-retn, ingen ytre krefter spiller noen rolle.

$\Rightarrow$ Driv bevart: $\sum F_x = \frac{d}{dt}\left(p_{kloss,x}^{B} + p_{kule,x}^{A}\right) = 0$

Kule før: $m_A v_{A0}$ (②) — Kule etter: $m_A v_{A1}$ — Kloss etter: $m_B v_{B1}$

$m_A v_{A0} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (m_A + m_B) v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A0}$ (①)

Del 2 Etter kollisjonen: Kun tyngdekraft gjør arbeid $\Rightarrow$ Mek. energi bevart

Nullpkt pot. energi i startposisjon $\Rightarrow K_0 = U_1$

$\frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = (m_A + m_B) g h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$ (②)

Setter ① = ②: $\frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A0} = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_{A0} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 0.30 \text{ m}} \cdot \frac{1.01 \text{ kg}}{0.01 \text{ kg}}$

$= 245 \text{ m/s} = 2.5 \cdot 10^2 \text{ m/s}$

($m_A + m_B$ ↓ $m_A$)

# Fellesoppgave: ballistisk pendel

b) Hvor stort var tapet av mekanisk energi i systemet kule + trekloss?

Før kollisjonen: $K_0 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2$

Etter kollisjonen: $K_1 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = K_0 \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B}$

Se på forholdet $\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{0.010\,kg}{1.010\,kg} \approx 0.01$, ca 1%

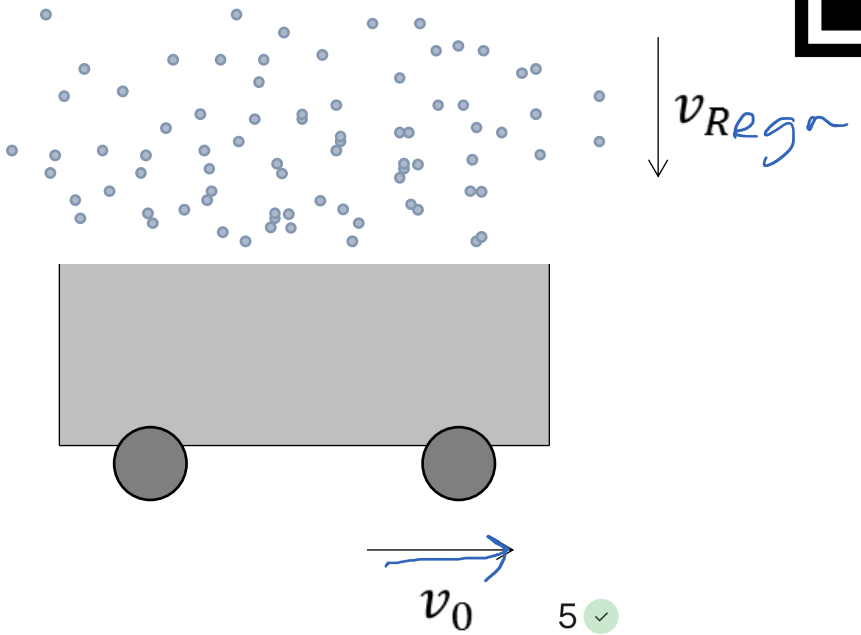
$\Rightarrow \Delta K = K_1 - K_0 \approx 0.01 K_0 - K_0 = -0.99 K_0$

# Mentimeter Det regner 🌧️

www.menti.com 1642 0521

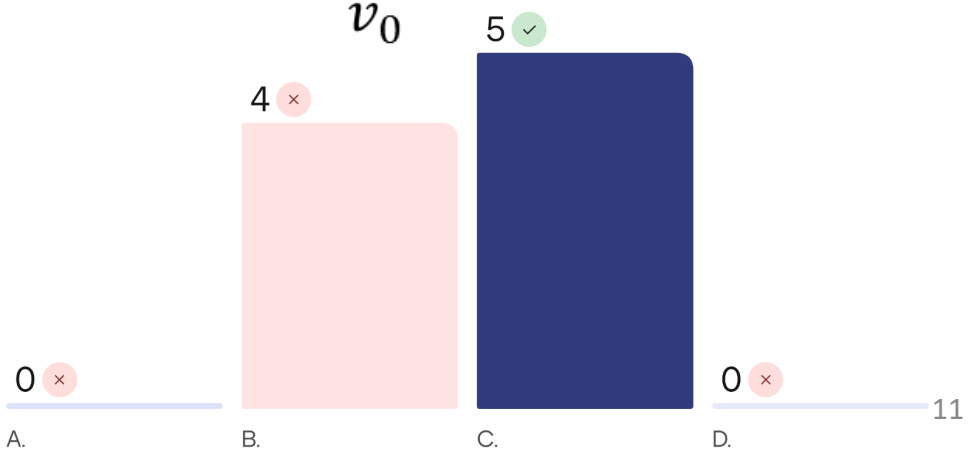
Regnet faller ned i en åpen vogn som triller på et rett, friksjonsfritt spor. Hastigheten til vognen vil

A. øke
B. være uforandret
C. minke
D. vet ikke




Ingen ytre kraft i horisontal retning
$\Rightarrow$ Bevegelsesmengde er bevart: $p_x = mv_0$

Massen *øker* med regnet som samles opp i vogna
$\Rightarrow$ hastigheten minker



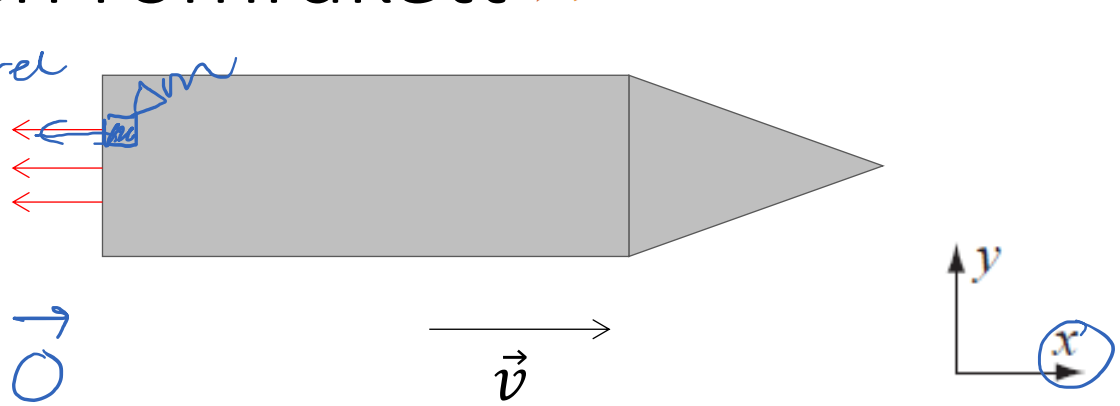

Svar C 🌧️

# Eksempel, endring i masse: en romrakett 🚀

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Ingen ytre krefter $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Gass strømmer kontinuerlig ut med konstant hastighet $\vec{v}_{rel}$ relativt til raketten:




$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

I $x$-retning:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt}\,dt = -v_{rel}\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\,dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} dv = -v_{rel}\int_{m(t_0)}^{m(t_1)} \frac{1}{m}\,dm$$

$$v(t_1) - v(t_0) = -v_{rel}\left[\ln(m(t_1)) - \ln(m(t_0))\right]$$

$$\Rightarrow v(t_1) = v_0 - v_{rel}\ln\left[\frac{m(t_1)}{m(t_0)}\right]$$

Siden $m(t_1) < m(t_0)$ blir leddet $-v_{rel}\ln\left(\frac{m(t_1)}{m(t_0)}\right)$ positivt!

Skyvekraft: $\frac{dm}{dt}\vec{v}_{rel}$

Massen til raketten blir mindre og hastigheten øker 👍

# Rakett med vann som «drivstoff» 🚀💦



Totrinns vannrakett



Max høyde: 246 m

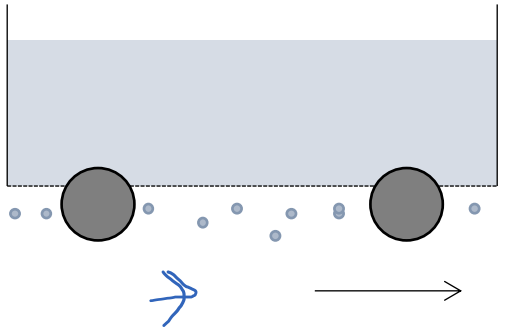
https://www.youtube.com/watch?v=0qzOzjRJpaU
http://www.aircommandrockets.com/day90.htm

# Mentimeter En vogn som er lekk

www.menti.com kode 1642 0521

En tankvogn triller på et rett, friksjonsfritt spor. Det er neglisjerbar luftmotstand. Undersiden av vogn er utett slik at væsken renner ut. Hastigheten til vognen vil

A. øke
B. være uforandret
C. minke
D. vet ikke

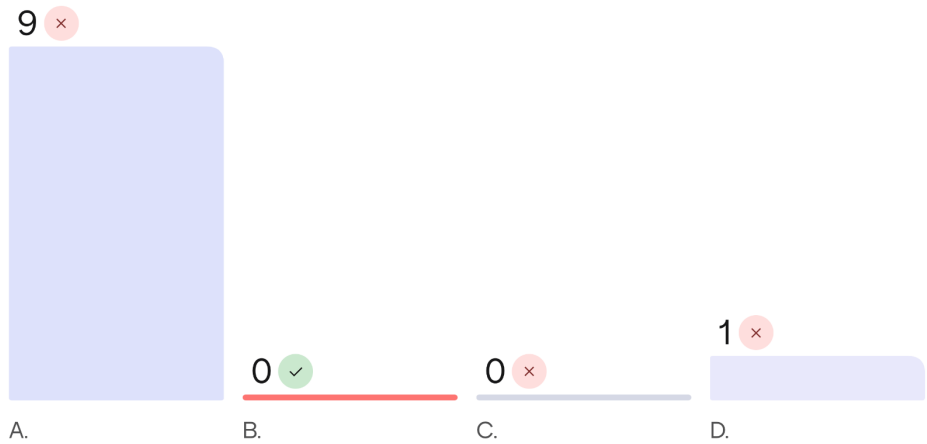


$v_0$

Ingen ytre kraft i horisontal retning
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde i $x$-retning bevart: $\sum F_x = \frac{dp_x}{dt} = 0$

Væsken som renner ut har samme hastighet som vogna: $v_{rel} = 0$

$\Rightarrow$ hastigheten til vogna forandrer seg ikke: $\frac{dv_x}{dt} = 0$




Svar B

# Takk for i dag! 😀