FYS1100 Mekanikk og modellering, vår 2025
Seminar uke 13: Spesiell relativitetsteori, Lorentztransformasjonene

(Kompendium kap. 18)

Læringsmål: Kjenne til og kunne bruke ***tidsdilatasjon***, ***lengdekontraksjon***, og ***Lorentz-transformasjonene.***

Beskjeder:

- ✓ Forelesning neste uke: Minkowski-diagrammer og relativistisk energi, deretter litt repetisjon.
- ✓ Seminar: kun eksperiment 2 – neste uke
- ✓ Uka før eksamen: vi bruker seminartimen tirsdag 20. mai 10-15-12 til eksamensverksted 😊

– mulighet også 2. mai, 09:00 Tidsrommet Origo

Tirsdag 28.04.2025



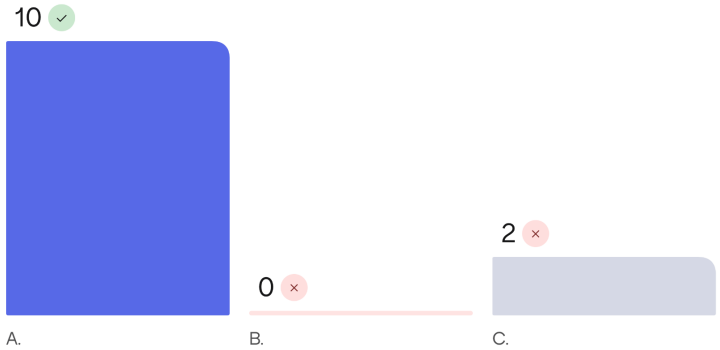
Mentimeter Måle et romskip 🚀

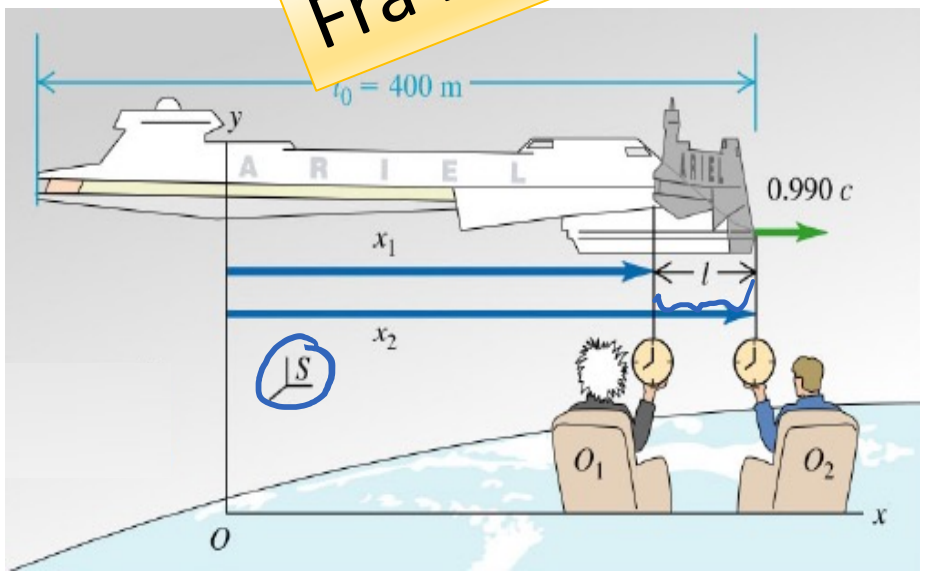
www.menti.com

Fra i går ☺️

Et romskip flyr forbi jorden med $v = 0.990c$. En person i romskipet måler at romskipet er 400 m langt. Hvilken lengde måler en observatør på jorden?

A. 56.4 m
B. 400 m
C. 2.84 km





l_0 = 400 m er egenlengden til romskipet

En observatør på Jorden beveger seg med hastighet $v = 0.99\ c$ relativt til romskipet.

Lengdekontraksjon:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.992}} = 7.089$$

$$L = \frac{400\,m}{7.089} = 56.4\,m.$$

Eksempel: Myoner 🔵

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

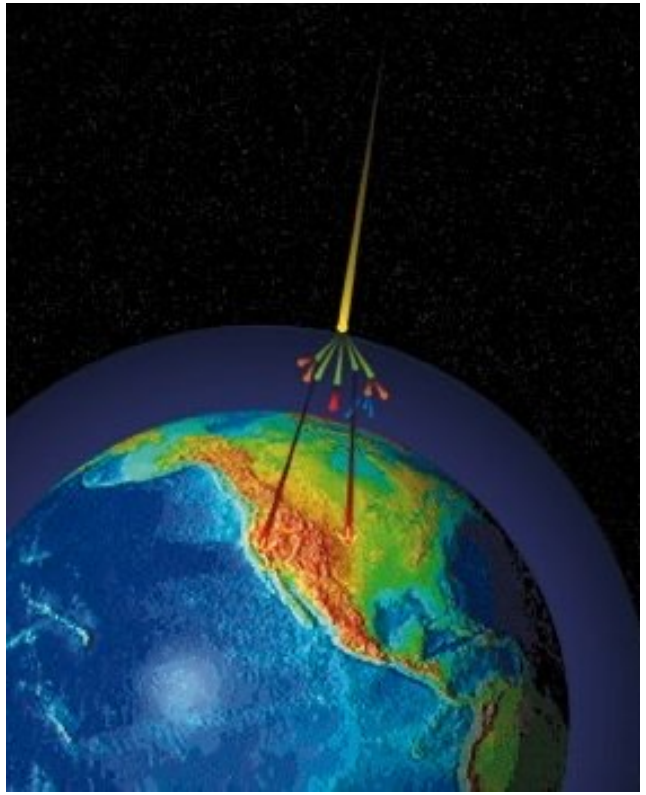
Myoner er elementærpartikler som kan oppstå når høyenergetisk kosmisk stråling treffer jordens atmosfære (i ≈15 km høyde).

$c = 299\,792\,458$ m/s

Pga. den høyenergetiske kosmiske strålingen har myoner høy hastighet: $v = 0.999c$

Vi måler ≈150 myoner / (s m^2) på bakken

Henfall: $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$



Gjennomsnittlig levetid målt i laboratoriet: $\tau = 2.2\ \mu s$

Hvor langt kommer myonet i sin levetid?

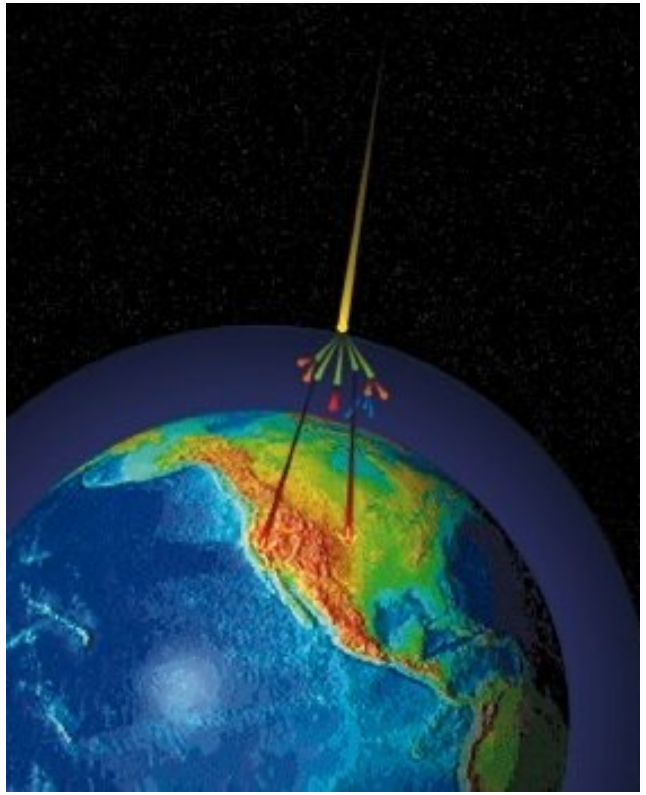
Strekning: $x = v \cdot \tau \approx 2.99 \cdot 10^8$ m/s $\cdot\ 2.2 \cdot 10^{-6}$ s

≈ 660 m !

Hvordan er det mulig at så mange myoner når bakken og kan måles der? 🤔

Eksempel: Myoner 🔵

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]



Vi har blandet referansesystemer!

- levetiden er målt i referansesystemet til myonet S'
- strekningen gjennom atmosfæren er målt i jordens referansesystem S

Hendelse 1: myon oppstår
Hendelse 2: myon henfaller

I system tilknyttet myonet:
begge hendelser inntreffer på samme sted
tidsintervallet er egentid $\Delta t_0 = \tau = 2.2\ \mu s$

Jorden beveger seg med $v = 0.999\ c$ relativt til myonet, sett fra jorden er levetid til myonet:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{2.2 \cdot 10^{-6} s}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = 49 \cdot 10^{-6} s = 49 \mu s$$

Hvor langt kommer myonet i jordens referansesystem?

$$x = v \Delta t \approx 2.99 \cdot 10^8 \, m/s \cdot 49 \cdot 10^{-6} s \approx 15 km!$$

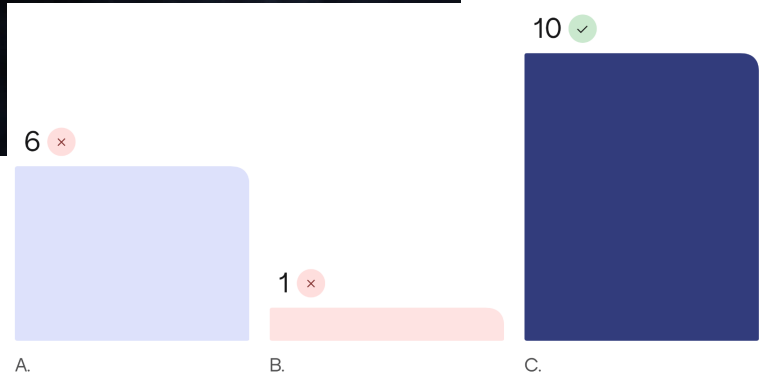
Mentimeter Fotballkamp sett fra et romskip ⚽🚀

www.menti.com kode 5869 9066

Luke Skywalker er på vei til Jorden i sin X-wing med høy hastighet. Han ser på en fotballkamp på Ullevål stadion gjennom et sterkt teleskop. Etter Lukes klokke blir det mål etter 10 minutter. Hvor lang tid tar det før du ser scoringen fra tribunen?

A. mer enn 10 minutter
B. nøyaktig 10 minutter
C. mindre enn 10 minutter





Hendelse 1: kampen begynner
Hendelse 2: scoring

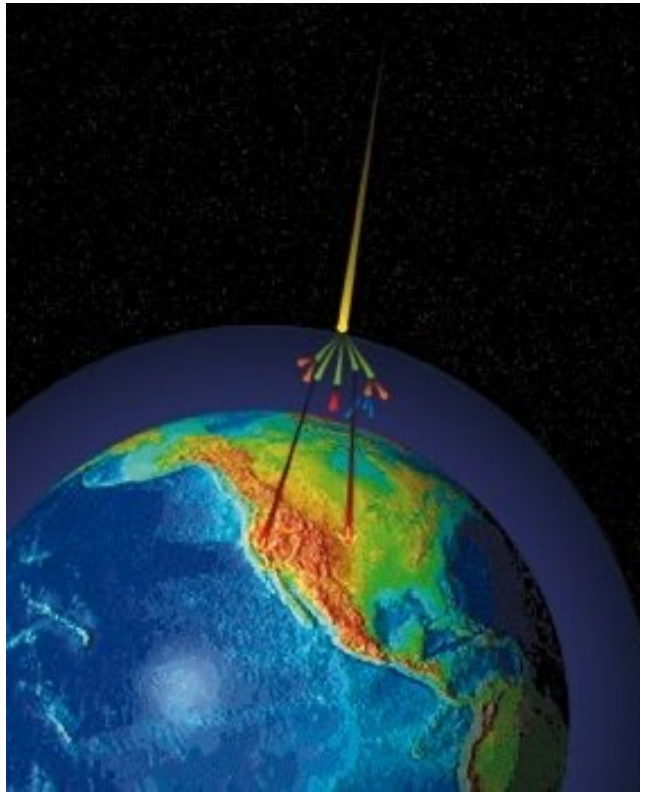
Vi måler egentid Δt_0 i system «Jorden» hvor begge hendelsene skjer på (cirka!) samme sted.

Luke måler $\Delta t = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$ i system «romskip». Svar C. 😎

Eksempel: Myoner igjen 🔵

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

System Jorden: *S*
System myon: *S'*



I systemet hvor myonet er i ro er levetiden ***egentid***:

$\Delta t' = \Delta t_0 = \tau = 2.2\,\mu s$

I system Jorden er levetiden lengre på grunn av tidsdilatasjon.
For $v = 0.999\,c$ har vi funnet:

$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 49\,\mu s$

Sett fra Jorden beveger myonet seg en strekning:

$\Delta x = v\Delta t \approx c\,\Delta t \approx 15\,km = l_0$

Dette er ***egenlengden*** siden jeg som observatør på Jorden måler strekningen $\Delta x = l_0$ i ro.

I myonets system *S'* beveger jorden seg, og myonet opplever strekningen kontrahert:

$\Delta x' = \frac{l_0}{\gamma} \approx 15\,km \cdot \sqrt{1 - 0.998^2} \approx 660\,m$

Det tilsvarer lengden myonet beveger seg i sin egentid: $\Delta x' \approx c \cdot \Delta t_0$

Myon-målinger 🔵

nature

Explore content ⌄ About the journal ⌄ Publish with us ⌄ Subscribe

nature › articles › article

Article | Published: 28 July 1977

Measurements of relativistic positive and negative muons

J. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, F. Krienen, F. Farley, J. H. Field, W. Flegel & P. M. Hattersley

Nature **268**, 301–305 (1977) | Cite this article

1816 Accesses | **173** Citations | **22** Altmetric | Me

Abstract

The lifetimes of both positive and negative relativistic ($\gamma = 29.33$) muons have been measured in the CERN Muon Storage Ring with the results $\tau^+ = 64.419\ (58)\ \mu s$, $\tau^- = 64.368\ (29)\ \mu s$ The value for positive muons is in accordance with special relativity and the measured lifetime at rest: the Einstein time dilation factor agrees with experiment with a fractional error of 2×10^{-3} at 95% confidence. Assuming special relativity, the mean proper lifetime for μ^- is found to be $\tau_0^- = 2.1948(10)\ \mu s$ the most accurate value reported to date. The agreement of this value with previously measured values of τ_0^+ confirms CPT invariance for the weak interaction in muon decay.

https://www.nature.com/articles/268301a0

Lorentztransformasjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

System S: (x, y, z, t)
System S': (x', y', z', t')
S' beveger seg med hastighet u relativt til S.

Posisjon til O' i system S ved tid t er ut

x' er egenlengde i S',
men kontrahert i S: $x = ut + \frac{x'}{\gamma} \quad | \cdot \gamma$

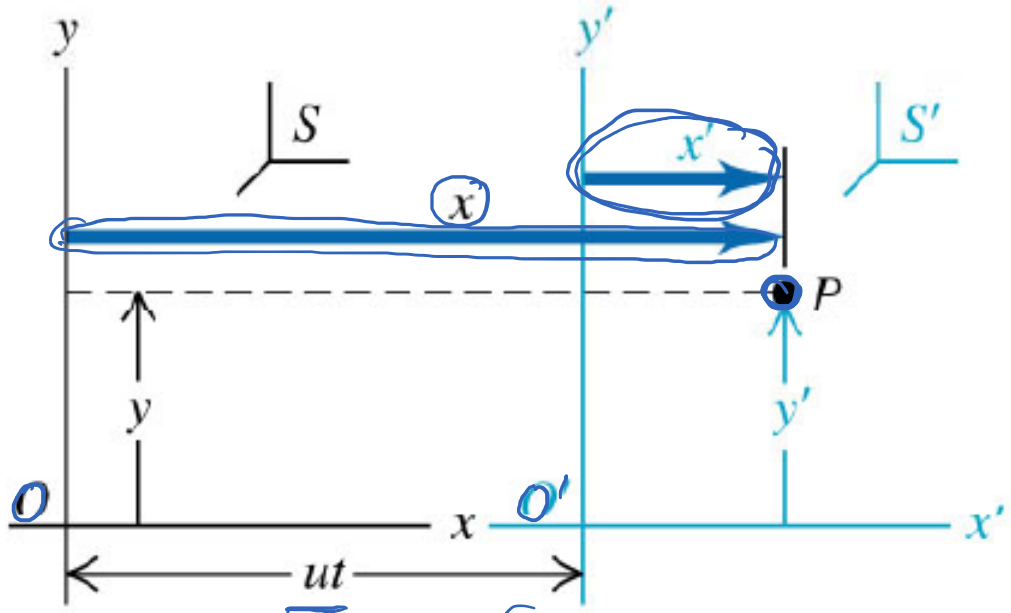
Transformasjon $S \to S'$: $\gamma x = \gamma ut + x'$

$\Rightarrow x' = \gamma(x - ut)$ (1)

Transformasjon $S' \to S$:

$x' = -ut' + \frac{x}{\gamma}$ (2)

(motsatt fortegn for relativhastighet u)



Setter (1) = (2):

$\gamma(x - ut) = -ut' + \frac{x}{\gamma}$

$ut' = \frac{x \cdot \gamma}{\gamma \cdot \gamma} - \gamma(x - ut)$

$= \gamma\left(x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - x + ut\right)$

$ut' = \gamma\left(-x\frac{u^2}{c^2} + ut\right)$

$= \gamma u\left(t - x\frac{u}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{t' = \gamma\left(t - x\frac{u}{c^2}\right)}$

Lorentztransformasjoner

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

Transformasjon tilbake:
omvendt fortegn for u og bytte S og S'

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

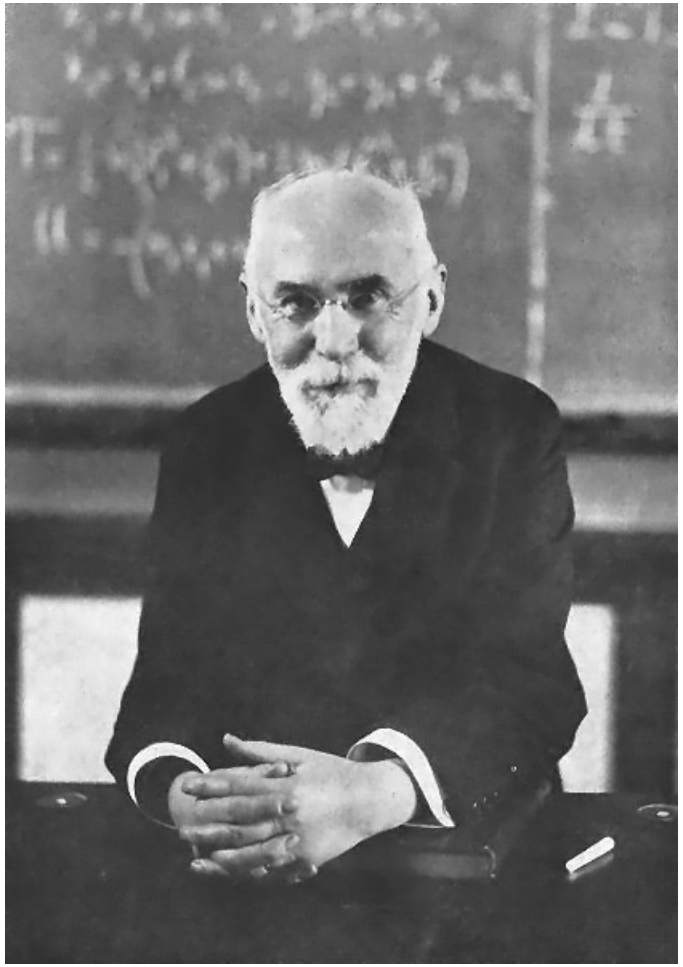
Hvis $u \ll c$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx 1$$

$$\Rightarrow x' = \gamma(x - ut) \approx x - ut$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \approx t$$

($\gamma \approx 1$, $\frac{u}{c^2}x \approx 0$)



Hendrik Antoon Lorentz
1853 – 1928

$\Rightarrow$ Galileotransformasjon 👍

Lengdekontraksjon og tidsdilatasjon med Lorentztransformasjon

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

Lengdekontraksjon

Et legeme i ro i system S' har **egenlengde**: $L' = x_2' - x_1'$

Legemet beveger seg i system S

$\Rightarrow$ vi må måle posisjonene x_1 og x_2 ***samtidig*** ($t_1 = t_2$) i S:

$$L' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - ut_2) - \gamma(x_1 - ut_1)$$

$$= \gamma(x_2 - x_1) - \gamma u \underbrace{(t_2 - t_1)}_{=0} = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$



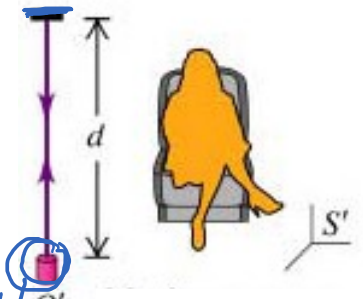
Tidsdilatasjon

Egentid: vi måler et tidsintervall $\Delta t'$ på ***samme sted***: $x_1' = x_2'$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2'\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1'\right)$$

$$= \gamma(t_2' - t_1') + \gamma\frac{u}{c^2}\underbrace{(x_2' - x_1')}_{=0} = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\Delta t'$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma\Delta t' = \gamma\Delta t_0}$$



Lorentztransformasjon for hastighet

[✏️ lysbilde med skriblerier på iPad ✏️]

En partikkel beveger seg i system *S* med hastighet $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

og i system *S'* med hastighet $v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$

Lorentztransformasjon: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$, $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$

$$\Rightarrow v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

Hvis $u \ll c$: $v_x' \approx v_x - u$ ⇒ Galileotransformasjon 🥳

Hvis $v_x = c$: $v_x' = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c^2}c} = \frac{c\left(1 - \frac{u}{c}\right)}{1 - \frac{u}{c}} = c$

⇒ Einsteins 2. postulat 🥳

Mentimeter En tvilling på romferd 🚀

www.menti.com kode 5869 9066

Luke tar en tur til planeten Dagobah og tilbake. Hans tvilling-søster Leia forblir hvor hun er.

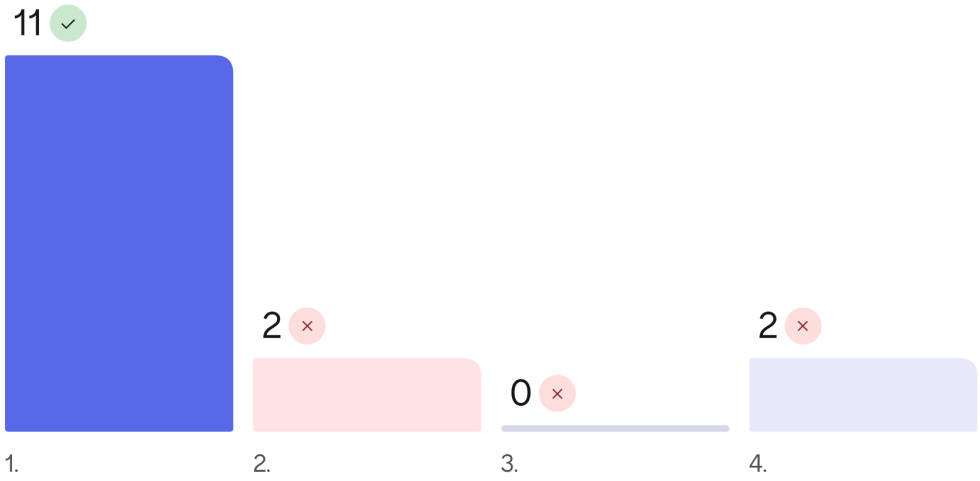
Pga. hans høye hastighet går tiden saktere for Luke (tids-dilatasjon) og han er yngre enn Leia når han kommer tilbake.

Sett fra Lukes synspunkt i romskipet beveger Leia seg med høy hastighet, så tiden går saktere for Leia og Luke er eldre når han kommer tilbake.

Når Luke kommer tilbake:

1. er Luke yngre enn Leia
2. er begge like gamle
3. er Luke eldre enn Leia
4. dette er et paradoks og det finnes ingen svar





Vi forklarer på forelesning på mandag 🥰

Takk for i dag! 😀