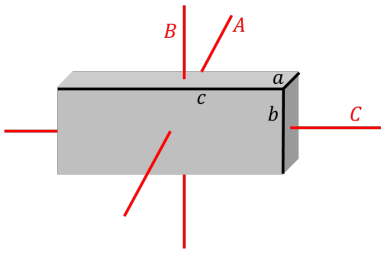
Diskusjonsoppgaver uke 11

Diskusjonsoppgaver i gruppetimen for smågrupper (3-4 personer).

D11.1 En murstein

En homogen murstein har kantlengder $a < b < c$ og kan rotere om aksene A, B og C, som er parallelle med kantene og går gjennom massesenteret (se figur). Ranger størrelsen på treghetsmomentet om de tre aksene. Diskuter betydningen av treghetsmomentet når du ønsker å rotere mursteinen om de forskjellige aksene. Bruk følgende begreper: kraftmoment, vinkelakselerasjon, rotasjonsenergi, vinkelhastighet.



Løsning: Treghetsmomentet beskriver massefordelingen relativt til rotasjonsaksen. Jo større avstand massen har fra rotasjonsaksen, jo større er treghetsmomentet. Treghetsmomentet er derfor størst ved rotasjon om den korteste aksen, mens den er minst ved rotasjon om den lengste aksen, altså $I_A > I_B > I_C$. Treghetsmomentet for rotasjon om aksen A er $I_A = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$, og tilsvarende for de andre aksene, men man trenger ikke å regne for å rangere treghetsmomentene. Jo større treghetsmomentet er, jo større kraftmoment må vi bruke for å få en gitt vinkelakselerasjon. Hvis vi bruker det samme kraftmomentet, så er vinkelakselerasjonen størst om akse C og minst om akse A. For den samme vinkelhastigheten er rotasjonsenergien størst når mursteinen roterer om akse A.

D11.2 Arbeid og kraftmoment

Både arbeid og kraftmoment er definert som et produkt mellom en kraft og en strekning. Hva er forskjellen? Hva er enhetene til arbeid og kraftmoment? Forklar!

Løsning: For å beregne arbeid må du bruke kraftkomponenten som er parallell med strekningen legemet beveger seg. For å finne kraftmomentet må du bruke kraftkomponenten som er vinkelrett på strekningen fra rotasjonsaksen til angrepspunktet av kraften. For å beregne arbeidet må du altså bruke skalarproduktet (prikkproduktet) mellom kraften og strekningen (og du må integrere), mens du må bruke vektorproduktet (kryssproduktet) mellom kraften og avstanden fra aksen for å beregne kraftmomentet. Arbeid og kraftmoment har samme enhet, Nm, men er helt forskjellige fysiske størrelser.

D11.3 Olabil-kappløp

Du skal bygge en olabil for et kappløp ned en bakke. Reglementet tilsier at den skal ha fire hjul og at massen til olabilen og sjåføren til sammen skal være 120 kg, ellers er designet fritt. For at olabilen din skal vinne løpet og komme først ned, burde du bruke store og tunge hjul, eller små og lette hjul? Er det bedre med hjul som er laget av fulle sylindre eller sylinderskall? Forklar!

Løsning: Potensiell gravitasjonsenergi omdannes til kinetisk energi til massesenteret til systemet "olabil med sjåfør pluss fire hjul" og kinetisk energi til rotasjon av hjulene. For å komme raskest mulig ned bakken, ønsker vi å få mest mulig kinetisk energi til massesenteret og minst mulig kinetisk energi til rotasjon av hjulene.

Vi ser på systemet olabil med sjåfør pluss fire hjul. Vi kaller massen til olabilen, personen og de fire hjulene M, og systemet beveger seg ned en bakke med høydeforskjell h. Vi ser bort fra luftmotstand og antar at hjulene hele tiden triller uten å gli, slik at rullebetingelsen er oppfylt. Da er mekanisk energi bevart og vi får:

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2.$$

Her er I_{cm} treghetsmomentet til de fire hjulene om rotasjonsaksen gjennom deres massesenter, V er massesenterets fart og ω er vinkelfarten til hjulene. Vi bruker rullebetingelsen og relaterer massesenterfarten med vinkelfarten: $\omega = \frac{V}{R}$, hvor R er radien til hjulene. Da får vi:

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{V}{R}\right)^2.$$

Vi løser for V^2 og får:

$$V^2 = \frac{2Mgh}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}}.$$

Nå kan vi se på to muligheter for hvordan hjulene er laget. Hvis vi antar at hjulene kan tilnærmes som fulle sylindere, har vi at $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, hvor m er massen til de fire hjulene. Da får vi:

$$V^2 = \frac{2Mgh}{M + \frac{1}{2}m}.$$

Hvis vi i stedet antar at hjulene kan tilnærmes som sylinderskall, med $I_{cm} = mR^2$, får vi:

$$V^2 = \frac{2Mgh}{M + m}.$$

Så, radien til hjulene (størrelsen) spiller ingen rolle, men massen til hjulene bør være så liten som mulig for å få så stor fart som mulig. Vi ser også at for en gitt masse, så lønner det seg å utforme hjulene som fulle sylindere i stedet for som sylinderskall, siden en full sylinder har mindre treghetsmoment for en gitt masse og radius.