Oppgavesett uke 4

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa.

Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 4: Sirkelbevegelse og Numerisk Løsning av Diff-Likninger". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 4.1 Noen differensiallikninger

Finn løsningen til de følgende differensiallikningene. *Hint: Husk logaritmereglene.*

a) $\frac{dy}{dx} = 3xy$ som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 4$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = 3xdx$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int 3xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = \frac{3}{2}x^2 + A$$

Da får vi at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

med $C = e^A$ en ny konstant.

Videre bruker vi initialbetingelsen for å finne den spesifikke løsningen

$$y(0) = 4 = Ce^0$$

$$C = 4$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = 4e^{\frac{3}{2}x^2}$$

b) $\frac{dy}{dx} + y = 2$ med initialbetingelsen $y(0) = 8$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad dy = (2-y)dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{2-y} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{2-y} = \int dx$$

På venstre side utfører vi substitusjonen $u = 2 - y$:

$$\Rightarrow \qquad -\int \frac{du}{u} = x + A \qquad \Rightarrow \qquad -\ln u + A = x + B$$

$$\ln \frac{1}{u} + A = x + B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u} = e^{x+B-A} = Ce^{x}$$

$$\Rightarrow \qquad u = De^{-x}$$

$$\Rightarrow \qquad 2 - y = De^{-x}$$

$$\Rightarrow \qquad y = 2 - De^{-x}$$

Vi finner den spesifikke løsningen ved å bruke initalbetingelsen.

$$y(0) = 8 = 2 - De^{-0}$$

$$D = -6$$

Vi får da at løsningen blir

$$y(x) = 2 + 6e^{-x}$$

c) $\frac{dy}{dx}x = y^2$ med initialbetingelsen $y(2) = 6$.

Løsning:

$$\frac{dy}{dx}x = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{y} = \ln(x) - C$$

$$y = \frac{1}{C - \ln x}$$

Da har vi den generelle løsningen for differensiallikningen. Vi finner den spesifikke løsningen ved å bruke initialbetingelsene

$$y(2) = 6 = \frac{1}{C - \ln 2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{6} = C - \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{6} + \ln 2$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{6} + \ln 2 - \ln x}$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{6}{1 + 6\ln \frac{2}{x}}$$

d) $x\frac{dy}{dx} + 2x^2y = 5xy$ med initialbetingelsen $y(3) = 3$.

Løsning: Her begynner vi med å forenkle uttrykket. Vi deler likningen på $1/x$ og får

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 5y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y(5-2x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = (5-2x)dx$$

Deretter integrerer vi

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int (5-2x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln y = 5x - x^2 + A$$

hvor A er en konstant. Dermed får vi at den generelle løsningen er ($C = e^A$)

$$y(x) = Ce^{5x-x^2}$$

Vi finner så den spesielle løsningen:

$$y(3) = 3 = Ce^6 \qquad \Rightarrow \qquad C = 3e^{-6}$$

Løsningen blir da

$$y(x) = 3e^{5x-x^2-6}$$

TDS 4.2 Tog i en sving

Et tog kjører med konstant fart på 200 km/t gjennom en 90°-sving som er del av en sirkel med radius R.

a) Finn et uttrykk for akselerasjonen til toget.

b) Hvor stor må R minst være slik at akselerasjonen er mindre enn 0.10 g, hvor g = 9.8 m/s^2?

c) Hvor lang tid bruker toget for å kjøre gjennom svingen?

Løsning:

a) Farten til toget er konstant. Derfor har vi ingen akselerasjon i tangential retning. Sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2}{R}$

b)

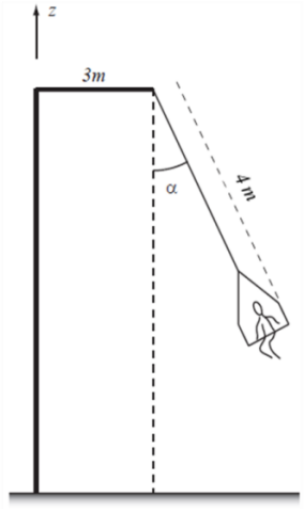
$$a_N = \frac{v^2}{R} \leq \frac{g}{10} \qquad \Rightarrow \qquad R \geq \frac{10v^2}{g} = 3.2\text{km}$$

c)

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\pi R}{2v} = 89\text{s}$$

TDS 4.3 Karusell

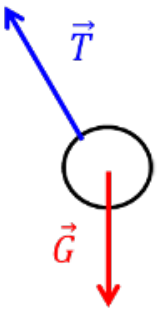
Du sitter på en karusell og beveger deg i en horisontal sirkel. Setet ditt henger i et 4.0 m lang kjede som er festet på en 3.0 m lang horisontal stang, som vist i figuren. Massen til kjedet er neglisjerbar i forhold til din masse. Mens karusellen roterer med konstant vinkelfart er vinkelen mellom kjedet og vertikalen 30°. Hva er vinkelfarten?



Løsning:

Du beveger deg på en sirkelbane med radius $R = 3\text{m} + 4\text{m}\sin 30^\circ = 5\text{m}$. Det er ingen bevegelse i vertikal retning, så $T\cos\alpha - mg = 0$. Resulterende kraft i horisontal retning holder deg på en sirkelbane: $T\sin\alpha = mR\omega^2$.

$$\tan\alpha = \frac{R\omega^2}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}\tan\alpha} = 1.1\text{rad/s}$$



Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 4.1

a) $y(x) = 4e^{\frac{3}{2}x^2}$

b) $y(x) = 2 + 6e^{-x}$

TDS 4.2

a) $a_N = \frac{v^2}{R}$.

b) $R \geq 3.2$ km.

c) $\Delta t = 89$ s.

TDS 4.3

$\omega = 1.1$ rad/s.

Øvingsoppgaver

Disse oppgavene kommer vi til å jobbe med i øvingstimene. Det er nok ofte mer å gjøre enn du rekker i timen, så det kan være lurt å forberede seg ved å se på dem på forhånd, slik at du kan spørre om det som du ikke får til.

G 4.1 På ekvator

Jordens radius er R = 6378 km. Du står på ekvator.

a) Hva er farten din gjennom verdensrommet på grunn av jordens rotasjon om sin egen akse?

b) Hvor stor er din akselerasjon på grunn av denne rotasjonen? Hvor stor er din akselerasjon i forhold til tyngdeakselerasjonen g?

Løsning:

a)

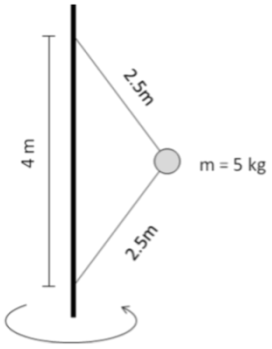
$$v = R\omega = R\frac{2\pi}{T} = 463.8\text{m/s}$$

b) På ekvator beveger du deg på en sirkelbane med radius R. Sentripetalakselerasjon:

$$a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 0.034\text{m/s}^2 = \frac{g}{291}$$

G 4.2 Kule i snorer

En masse $m = 5$kg er festet til en stav med to snorer som vist i figuren.



Når systemet roterer med vinkelhastighet ω så er snordraget i den øvre snoren $F_1 = 100$N.

a) Hva er snordraget F_2 i den nedre snoren?

b) Finn perioden T til rotasjonsbevegelsen.

c) Finn vinkelhastigheten ω i det tilfellet hvor snordraget i den nedre snoren er F_2=0.

d) Hva skjer når vinkelhastigheten er lavere enn i oppgave c?

Løsning:

a) Vi bruker Pythagoras for å finne radius i sirkelbevegelsen:

$$R = \sqrt{(2.5\text{m})^2 - (2\text{m})^2} = 1.5\text{m}$$

Vi finner vinkelen mellom aksen og snoren som:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1.5\text{m}}{2\text{m}}\right) = 36.9^\circ$$

Det gjelder for begge snorene. Det er ingen bevegelse i vertikal retning:

$$F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha - mg = 0$$

Vi kjenner til snordraget F_1 i den øvre snoren, som dermed gir

$$F_2 = F_1 - \frac{mg}{\cos\alpha} = 38.7\text{N}$$

b) Nettokraften i horisontal retning tvinger massen på en sirkelbane:

$$F_1\sin\alpha + F_2\sin\alpha = mR\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{(F_1+F_2)\sin\alpha}{mR}} = 3.33\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.89\text{s}$$

c) Vi bruker uttrykket fra oppgave a:

$$F_1 = F_2 + \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = 61.3\text{N}$$

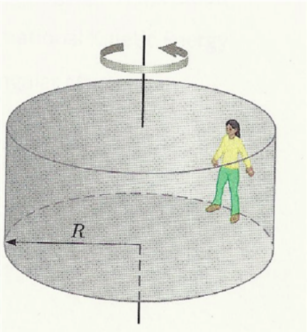
og uttrykket fra oppgave b for å finne vinkelhastigheten:

$$\omega = \sqrt{\frac{F_1\sin\alpha}{mR}} = 2.21\text{rad/s}$$

d) Hvis vinkelhastigheten er lavere enn i oppgave c, så blir vinkelen α mindre. Den øvre snoren forblir stram, men ikke den nedre.

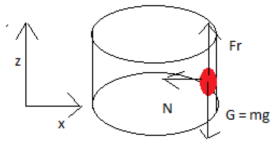
G 4.3 I en roterende sylinder

Du står med ryggen mot den indre veggen av en vertikal sylinder med radius $R = 3.0$ m. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom deg og veggen er $\mu_s = 0.20$. Sylinderen begynner å rotere og gulvet faller bort.



a) Tegn et frilegemediagram av kreftene som virker på deg etter at gulvet er tatt bort.

Løsning: Vi har normalkraft $\vec{N}$ fra veggen på personen, tyngdekraft $\vec{G}$, og statisk friksjonskraft F_r.



b) Hvilken vinkelfart ω må sylinderen ha slik at du ikke faller ned?

Løsning: Det skal ikke være noen bevegelse i vertikal retning. Newtons andre lov i vertikal retning gir:

$$F_r - G = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_r = mg.$$

Normalkraften er årsak til sentripetalakselerasjonen og gjør at du holder deg på en sirkelbane:

$$N = m\frac{v^2}{RR} = mR\omega^2.$$

For at du ikke skal skli ned må friksjonskraften være mindre en maks verdi for statisk friksjon:

$$F_r = mg \leq F_{r,max} = \mu_s N = \mu_s mR\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} = 4.0\ \mathrm{s}^{-1}.$$

G 4.4

Ustabile atomkjerner henfaller for å oppnå en stabil tilstand (radioaktivitet). Dette kan foregå ved at den radioaktive atomkjernen endrer antallet nøytroner eller protoner ved såkalt alfa- eller betahenfall.

Noe alle disse henfallstypene har til felles er at hyppigheten de skjer med kan beskrives med differensiallikningen:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \tag{1}$$

hvor N er antall radioaktive atomkjerner og λ er henfallskonstanten.

a) Skriv om likning (1) til en separabel differensiallikning.

b) Løs differensiallikningen og vis at den er på formen

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

når $N(0) = N_0$.

c) Tolk likningen. Hva skjer med det radioaktive materialet når tiden går mot uendelig? Hvilken betydning har det om λ er stor eller liten? Kan λ ha negativ verdi?

Løsning:

a)

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

b)

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int_{N(0)}^{N(t)} \frac{1}{N} dN = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow \ln N - \ln N(0) = \ln \frac{N(t)}{N(0)} = -\lambda t$$
$$\Rightarrow \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\lambda t} \Rightarrow N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\lambda t}$$

c) Ettersom tiden går mot uendelig vil det opprinnelige radioaktive materialet forsvinne, siden det henfaller til andre stoffer. Dersom λ er stor vil materialet henfalle raskere, dersom λ er liten vil materialet henfalle saktere. λ kan ikke ha en negativ verdi, siden det vil bety at det vil bli mer radioaktivt materiale ettersom tiden går.

Fasit til gruppeoppgaver

G 4.1

a) 463.8 m/s.

b) $0.034\ \text{m/s}^2 = g/291$.

G 4.2

a) 38.7 N.

b) 1.89 s.

c) 2.21rad/s.

G 4.3

b) $\omega \geq 4.0\ \text{s}^{-1}$.

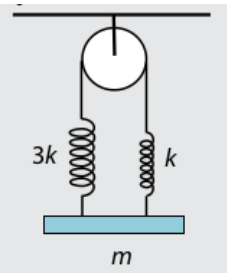
G 4.4

a) $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$.

Ukas utfordring

Denne oppgava krever mer enn vanlig kompliserte resonnement eller utregninger. Det er en utfordring for studenter som føler at de mestrer stoffet og trenger noe ekstra å jobbe med. **G 4.5**

Svingende planke



En planke med massen m henger horisontalt i to vertikale fjærer med fjærkonstanter k og $3k$. Fjærene er forbundet med ei snor som glir over ei friksjonsfri masseløs trinse. Hvis vi trekker planken ned og slipper den, svinger den opp og ned, men holder seg til en hver tid horisontal. Hva er perioden til svingningene? Vi oppgir at svingetida til et lodd med massen m som henger i en fjær med fjærkonstanten k er $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Løsning: Hvis vi trekker planken en strekning x ned fra likevektsposisjonen vil fjærene trekke tilbake med en samlet kraft F. Siden snora beveger seg fritt over trinsa må det være samme kraft i begge fjærene, og den må være $F/2$. Den totale forlengelsen av begge fjærene er $2x$. Hvis vi kaller forlengelsene i hver fjær for x_k og x_{3k}, så må $x_k + x_{3k} = 2x$ og $3kx_{3k} = kx_k$. Dette gir $x_k = \frac{3}{2}x$ og $x_{3k} = \frac{1}{2}x$. Dermed er $F = 3kx$, som betyr at den effektive fjærkonstanten for hele systemet er $3k$. Vi kan sette dette inn i formelen for svingetid for en harmonisk pendel og får

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$