Oppgavesett uke 5

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på snublegruppa. Tor Ole Odden har også laget programmering-soppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 5: Friksjon, arbeid og kinetisk energi". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 5.1 Eske og fjær

En eske med massen m = 5.0 kg, som beveger seg med fart v = 4.0 m/s på en friksjonsfri overflate, stoppes av en lett fjær med fjærkonstant k = 1000 N/m. Bruk arbeid-energi-teoremet for å finne ut hvor mye fjæren komprimeres.

Løsning: I begynnelsen har esken kinetisk energi $K_0 = \frac{1}{2}mv^2$, etterpå er $K_1 = 0$. Fjæren gjør et negativt arbeid på esken:

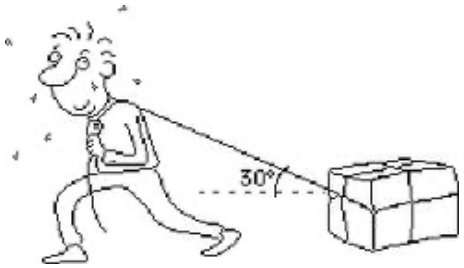
$$W = -\int_0^{x_1} kxdx = -\frac{1}{2}kx_1^2 = K_1 - K_0 = -\frac{1}{2}mv^2.$$

Dermed er

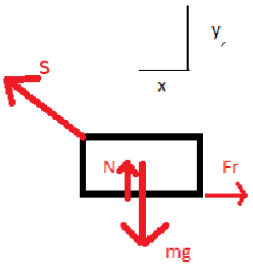
$$x_1 = v\sqrt{m/k} = 0.28 \text{ m}.$$

TDS 5.2 Å trekke en kiste

Du trekker en kiste med massen m = 10 kg langs gulvet med en strikk under en vinkel $\alpha = 30°$. Du bruker en konstant kraft S = 100 N og den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kisten og gulvet er $\mu_d = 0.30$. Finn det totale arbeidet gjort på kisten mens du trekker den en lengde Δx = 1.0 m langs gulvet.



Løsning:



Vi bruker Newtons andre lov i vertikal retning:

$$S\sin\alpha + N - mg = 0$$

som gir

$$N = mg - S\sin\alpha.$$

For dynamisk friksjon gjelder at friksjonskrafta er

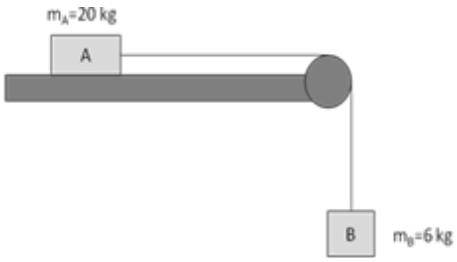
$$F_r = \mu_d N = \mu_d(mg - S\sin\alpha).$$

Arbeidet er da

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} (S\cos\alpha - F_r)dx = [S\cos\alpha - \mu_d(mg - S\sin\alpha)]\Delta x = 72\ \text{J}$$

TDS 5.3 Esker og trinse

Eske A med massen m_A = 20 kg ligger på et bord og er festet til eske B med massen m_B = 6.0 kg med en masseløs snor som går over en friksjonsfri og masseløs trinse. Etter at du slipper systemet fri, beveger eske B seg med konstant fart nedover. Finn den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom eske A og bordet.



Løsning: Vi vet at systemet beveger seg med konstant fart. Derfor er $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{0}$. Eske A: Newtons andre lov horisontal: $S - f_d = 0$, hvor S er snordraget og f_d den dynamiske friksjonskraften

$f_d = \mu_d N$. Vertikal: $N - m_A g = 0$. Newtons andre lov for eske B i vertikal retning: $S - m_B g = 0$. Vi setter inn:

$$S = f_d = \mu_d N = \mu_d m_A g = m_B g \qquad \Rightarrow \qquad \mu_d = \frac{m_B}{m_A} = 0.30.$$

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 5.1

$x_1 = 0.28$ m.

TDS 5.2

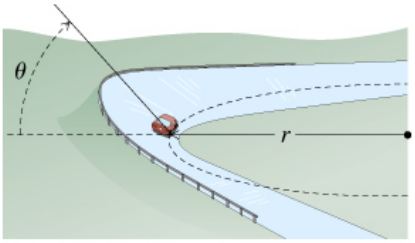
$W = 72$ J.

TDS 5.3

$\mu_d = 0.30$.

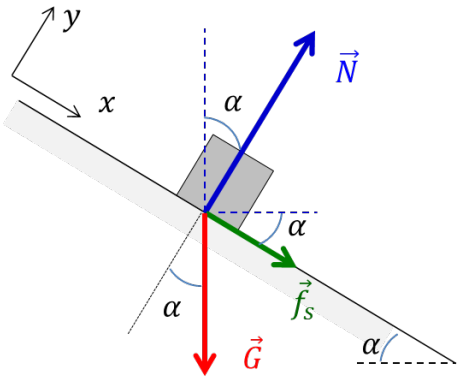
Gruppeoppgaver

G 5.1 Dosert sving



Kurven ved Daytona Speedway har helningsvinkel $\alpha = 31.0°$ og kurveradius $r = 316$ m. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom bildekk og asfalt er $\mu_s = 0.700$. Hvor fort kan en bil kjøre gjennom kurven uten å gli?

Løsning:



Uten friksjon må bilen kjøre med presis fart v_0 gjennom kurven. Med lavere fart sklir bilen ned og med høyere fart sklir bilen opp i kurven. Friksjon gjør det mulig at bilen kan kjøre saktere og raskere gjennom kurven, men bare så lenge den statiske friksjonskraften er mindre enn maksimalverdien. Vi er interessert i hvor raskt bilen kan kjøre. Ved høy fart er friksjonskraften rettet innover, dvs. friksjonskraften hindrer bilen å skli opp. Vi velger x-aksen langs helningen. For å bli i kurven trenger bilen en sentripetalakselerasjon i horisontal retning. Vi bruker Newtons andre lov i x- og y-retning

$$mg\sin\alpha + f_s = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha$$

$$N - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\sin\alpha.$$

Den statiske friksjonskraften har en maksimalverdi $f_s \leq \mu_s N$. Vi setter inn

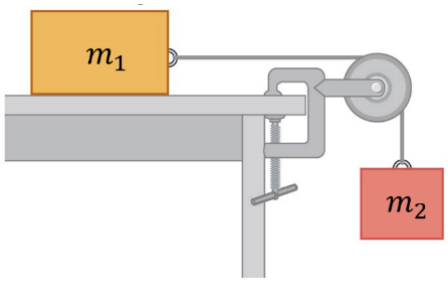
$$f_s = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha - mg\sin\alpha \leq \mu_s\left(m\frac{v^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right)$$

og finner at

$$v \leq \sqrt{gR\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}} = 83.4 \text{ m/s} = 300 \text{ km/t}.$$

Betingelsen for at et legeme ikke sklir ned en helning er at $\tan\alpha \leq \mu_s$. I dette tilfellet er $\tan\alpha = 0.6 < \mu_s$. Bilen kan stå stille og vil ikke skli ned helningen. Det er derfor mulig å kjøre gjennom kurven med $v \leq 300$ km/t.

G 5.2 Klosser og trinse



Vi ser på systemet vist i figuren, med to klosser forbundet med en snor, som går over en trinse. Vi kan anta at snoren og trinsen er masseløse, og at trinsen roterer uten friksjon.

a) Opprinnelig er klossene i ro. Hvis $m_1 = 10$ kg og den statiske friksjonskoeffisienten mellom esken og bordet er $\mu_s = 0.40$, hvor stor må m_2 minst være for at klossene beveger seg?

Løsning: For at systemet skal være i ro må snordraget på kloss 2 kompensere tyngdekraften, og det samme snordraget kompenserer den statiske friksjonskraften fra bordet på kloss 1:

$$m_2 g = T = f_S \leq f_{s,max} = \mu_s m_1 g.$$

Dermed er

$$m_2 \leq \mu_s m_1.$$

Systemet beveger seg når $m_2 > \mu_s m_1 = 4.0$ kg.

b) Vi ser på det samme systemet som i oppgave a), med $m_1 = 10$ kg og en statisk friksjonskoeffisient $\mu_s = 0.40$. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom bordet og klossen er $\mu_d = 0.30$. Hvor stor er friksjonskraften fra bordet på klossen når $m_2 = 2.0$ kg, $m_2 = 3.0$ kg, $m_2 = 4.0$ kg eller $m_2 = 5.0$ kg? I hvilke tilfeller er friksjonskraften statisk og i hvilke dynamisk?

Løsning: Betingelsen for at klossen ikke sklir er fortsatt den samme:

$$m_2 g = T = f_S \leq f_{s,max} = \mu_s m_1 g.$$

I tilfelle at $m_2 \leq 4$ kg er systemet i ro og friksjonskraften statisk. I så fall er $f_s = m_2 g$, altså $f_s = 20$ N, 30 N og 40 N. For $m_2 = 5.0$ kg er betingelsen ikke oppfylt og systemet beveger seg. I så fall er friksjonskraften dynamisk og vi får $f_d = \mu_d m_1 g$ = 30 N. Når $m_2 = 4.0$ kg har vi et grensetilfelle: Hvis massen til kloss 2 er minimalt større en 4.0 kg, så begynner klossen å skli, og friksjonskraften reduseres brått fra 39 N til 29 N.

c) Du gjør et eksperiment for å måle den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom klossen og bordet. Vi har $m_1 = 10$ kg og $m_2 = 3.0$ kg. Opprinnelig drar den røde klossen den gule til høyre med hastighet $v = 0.50$ m/s. Bevegelsen stopper etter at klossene har flyttet seg 1.0 m. Hvor stor er den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom den gule klossen og bordet?

Løsning: Gravitasjon gjør positivt arbeid på kloss 2 og friksjon gjør negativt arbeid på kloss 1. Snordraget gjør negativt arbeid på kloss 2 og positivt arbeid på kloss 1, slik at snordraget gjør ikke noe nettoarbeid på systemet. I starten har systemet, som består av de to klossene, kinetisk energi $K_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$, etterpå er systemet i ro. Høydeforskjellen h til kloss 2 er den samme som forflytningen $\Delta x = 1.0$ m til kloss 1. Vi bruker arbeid-energi-teoremet

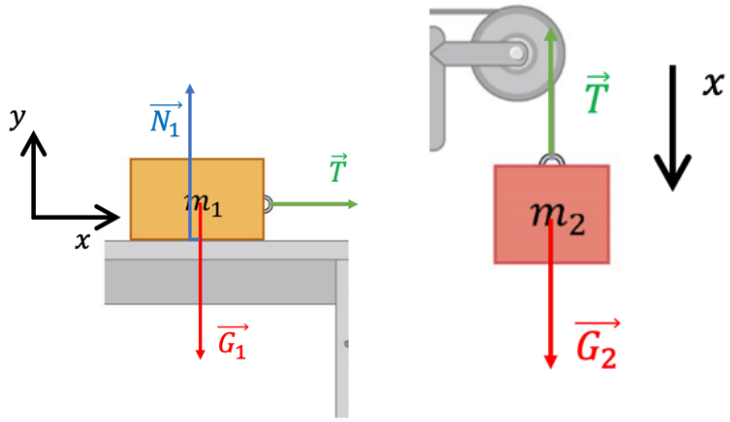
$$W = m_2 g h - \mu_d m_1 g h = K_1 - K_0$$

Dermed er

$$\mu_d = \frac{m_2 g h + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{m_1 g h} = 0.32$$

d) Finn et uttrykk for akselerasjonen til klossene. Skriv et program for å beregne og plotte hastigheten, posisjonen, og den kinetiske energien til den gule klossen på bordet (med masse $m_1 = 10$ kg) som funksjon av tid. Beskriv plottene du får: hva skjer med posisjonen, farten, og den kinetiske energien?

Løsning: Vi bruker Newtons 2. lov på begge klossene hver for seg for å bestemme deres felles akselerasjon.



Vi ser først på kloss 1 (den gule) i y-retning og får at $N_1 = G_1 = m_1 g$. N2L i x-retning, kloss 1:

$$T - f_d = m_1 a. \tag{1}$$

Vi vet at størrelsen på den dynamiske friksjonskraften er gitt ved $f_d = \mu_d N = \mu_d m_1 g$. Nå ser vi på kloss 2 (den røde) i x-retning (legg merke til retningen her, vi velger positiv retning i bevegelsesretning):

$$G_2 - T = m_2 a. \tag{2}$$

Nå legger vi sammen ligningene (1) og (2) for å finne akselerasjonen

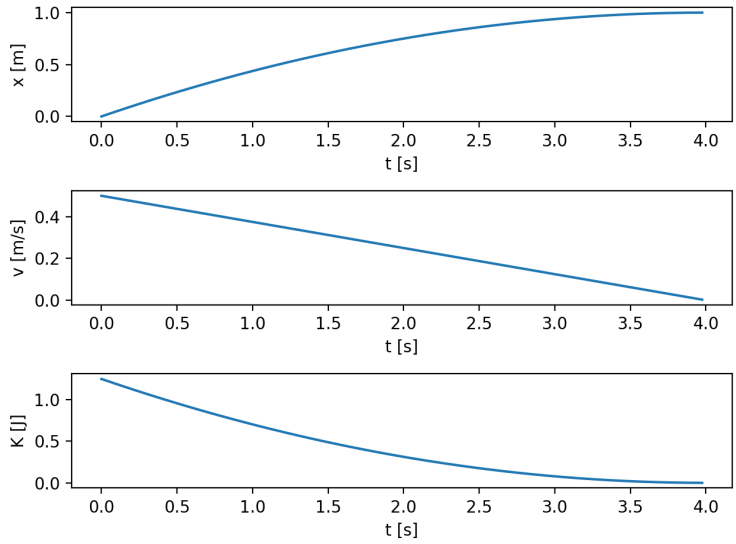
$$a = \frac{(m_2 - \mu_d m_1)g}{m_1 + m_2}$$

Dette bruker vi nå til å regne ut fart og posisjon til kloss 1, pluss kinetisk energi. Se eksempel på Pythonkode for plotting, og figur.

```
1  # Python-script
2  # Two boxes connected with a massless string and a pulley.
3  # Box 1, with mass m_1 = 10 kg is placed on the table,
4  # box 2 is hanging in the string (through the pulley) on the side ↩
       of the table.
5  # Using Euler-Cromer to calculate
6  # the position and velocity as function of time,
7  # and then calculating the kinetic energy from the velocity.
8  # Ann-Cecilie, Feb 14, 2022
9  # Last update: Feb 13, 2025
10 # a.c.larsen@fys.uio
11
12 # Import Python libraries
13 import numpy as np
14 import matplotlib.pyplot as plt
15
16 # Define the constants
17 g = 9.81     # gravitational acceleration, m/s^2 (near the Earth's ↩
       surface)
18 m_1 = 10.    # mass of box 1 (kg)
```

```
19 m_2 = 3.     # mass of box 2 (kg)
20 mu_d = 0.31656  # dynamic friction coefficient (dimensionless), as found in (c), keeping many digits here.
21 time = 5.0 # total time, s
22 dt   = 0.001 # time step in s
23
24 # Here using the numpy ceil funtion to get the number of array elements
25 # The ceil of a scalar b is the smallest integer i such that i>= b
26 # https://www.geeksforgeeks.org/numpy-ceil-python/
27 n = int(np.ceil(time/dt))
28 print(' Number of time steps: ',n)
29
30 # Define the arrays we need for the time t, position x, velocity v, and acceleration a.
31 # In addition we define an array for the kinetic energy K.
32 # This is for describing the motion of box 1.
33 # for each time step (n time steps).
34 t = np.zeros(n)
35 x = np.zeros(n)
36 v = np.zeros(n)
37 a = np.zeros(n)
38 K = np.zeros(n)
39
40 # Initial conditions to be set for the first array elements
41 x0  = 0.0 # We define the start position to be at x0 = 0 m at time t0 = 0s
42 v0  = 0.5 # The start velocity is 0.5 m/s i positive x direction
43 a0  = ((m_2 - m_1*mu_d)*g)/(m_1 + m_2) # The acceleration (in m/s^2) is constant until box 1 stops
44 print(a0)
45 t[0] = 0.0  # s
46 x[0] = x0   # m
47 v[0] = v0   # m/s
48 a[0] = a0   # m/s^2
49 K[0] = 0.5*m_1*v0**2 # Kinetic energy at time t0 = 0s, 1/2*m_1*v0^2
50
51 # Now we want to make a loop to calculate the velocity and position
52 i=0
53 while x[i]<=1.: #We know the box stops at 1 m
54     # here the acceleration is constant
55     a[i] = a0
56     # Euler-Cromer to calculate velocity and position
57     v[i+1] = v[i] + a[i]*dt # velocity
58     x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt # position
59     K[i+1] = 0.5*m_1*v[i]**2 # kinetic energy
60     t[i+1] = t[i] + dt # increment time vector too
61     i=i+1
62 #print(t[i])
63 print(' Index i =',i)
64
```

```
65 # Now we want to plot things again.
66 # Make space for three rows (nrows = 3), one column (ncols = 1), index = 1;
67 # the index starts at the left upper corner and increases to the right
68 # https://matplotlib.org/3.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.subplot.html
69 # In the first "window", we plot how the position x evolves with time
70 plt.subplot(3,1,1)
71 plt.plot(t[ :i], x[ :i])
72
73 # Put nice axis titles so we know what we are looking at! Remember units!
74 plt.xlabel('t [s]')
75 plt.ylabel('x [m]')
76
77 # Now switch to the next "window", index = 2
78 # Here we want to plot how the velocity v varies with time t
79 plt.subplot(3,1,2)
80 plt.plot(t[ :i],v[ :i])
81 plt.xlabel('t [s]')
82 plt.ylabel('v [m/s]')
83
84 # Finally we plot how the kinetic energy K varies with time t
85 # in the third "window" (index = 3)
86 plt.subplot(3,1,3)
87 plt.plot(t[ :i],K[ :i])
88 plt.xlabel('t [s]')
89 plt.ylabel('K [J]')
90
91 # Avoiding printing stuff on top of each other
92 # with the tight_layout function. Comment out if you get an error.
93 # Might not work for older Python versions
94 plt.tight_layout()
95
96 # Now, we want to show everything:
97 plt.show()
98 #ta-daaaa !!!
```



Vi ser at posisjonen øker og farten minker over tid. Akselerasjonen er konstant (og negativ, fordi leddet $\mu_d m_1$ er større enn leddet m_2 i uttrykket for akselerasjonen) og det ser vi også direkte fra fartsplottet. Farten blir null når x = 1.0 m som forventet, og den kinetiske energien som går kvadratisk med farten, går mot null når farten går mot null.

G 5.3 En pussig fjær

En fjær som ikke følger Hookes lov kan beskrives ved kraften $F(x) = ax - bx^2 + cx^3$, hvor a, b, og c er positive konstanter. Fjæren er strukket når $x > 0$ og komprimert når $x < 0$.

a) Hvor mye arbeid må du gjøre for å strekke eller komprimere fjæren en lengde x_1?

Løsning: Kraften er kun posisjonsavhengig. Vi integrerer derfor kraften over strekningen fra $x = 0$ til x_1:

$$W = \int_0^{x_1} F(x)dx = \int_0^{x_1} (ax - bx^2 + cx^3)dx = \frac{a}{2}x_1^2 - \frac{b}{3}x_1^3 + \frac{c}{4}x_1^4.$$

b) Er det enklere å strekke eller komprimere fjæren? Forklar!

Løsning: Hvis vi komprimerer fjæren er x_1 negativ, og alle tre ledd i uttrykket for arbeidet er positive. Hvis vi strekker fjæren er leddet med konstanten b negativt. Arbeidet vi må gjøre for å strekke fjæren er derfor alltid mindre enn arbeidet vi må gjøre for å komprimere fjæren om den samme strekningen, det er altså enklere å strekke fjæren.

Fasit til gruppeoppgaver

G 5.1

$v \leq 300$ km/t.

G 5.2

a) $m_2 > 4.0$ kg.

b) $f_s = 20$ N, 29 N, 39 N, 29 N.

c) $\mu_d = 0.32$.

G 5.3

a) $W = \frac{a}{2}x_1^2 - \frac{b}{3}x_1^3 + \frac{c}{4}x_1^4$.