Oppgavesett uke 6

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa. Tor Ole Odden har også laget programmeringsoppgaver ved hjelp av nettsiden Trinket.io, se "Uke 6: Energibevaring og gravitasjon". Disse anbefaler vi at dere jobber med hjemme før gruppetimen.

TDS 6.1

En eske med masse m sklir ned en rampe med helningsvinkel α. Esken starter i ro og det er ingen friksjon mellom esken og rampen. Finn farten v_1 til esken i bunnen av rampen etter den har sklidd en strekning d ved å bruke at mekanisk energi er bevart. Gjør det på to forskjellige måter:

a) ved å legge nullpunktet for den potensielle energien i *bunnen* av rampen, med y-aksen vertikalt oppover.

Løsning: Høyde i starten: $y_0 = d\sin\alpha$, høyde på slutten: $y_1 = 0$. Bevaring av mekanisk energi gir:

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1 \Rightarrow mgd\sin\alpha + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd\sin\alpha}.$$

b) ved å legge nullpunktet for den potensielle energien i *toppen* av rampen, med y-aksen vertikalt oppover.

Løsning: Høyde i starten: $y_0 = 0$, høyde på slutten: $y_1 = -d\sin\alpha$. Bevaring av mekanisk energi gir:

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1 \Rightarrow 0 + 0 = -mgd\sin\alpha + \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd\sin\alpha}.$$

ALtså får vi det samme resultatet som i forrige oppgave, valg av nullpunkt for den potensielle energien har ikke noe å si.

c) Hvorfor gjør ikke normalkraften noe arbeid?

Løsning: Normalkraften står alltid vinkelrett på bevegelsesretningen og gjør derfor ikke noe arbeid.

TDS 6.2

En fjær med fjærkonstant k lagrer den potensielle energien U_0 hvis den komprimeres med en lengde x_0 fra likevektslengden.

a) Hvor mye energi lagres når fjæren komprimeres dobbelt så mye?

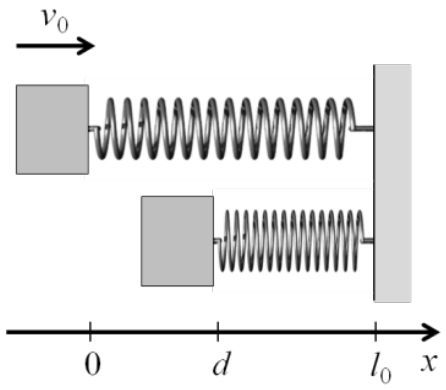
Løsning: Den potensielle energien i fjæren er $U_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$. Hvis fjæren komprimeres dobbelt så mye får den en potensiell energi $U_1 = \frac{1}{2}k(2x_0)^2 = 4U_0$

b) Hvor mye må fjæren komprimeres for å lagre dobbelt så mye energi?

Løsning: Vi må finne x_2 slik at $U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = 2U_0$. Da må $x_2 = \sqrt{2}x_0$.

TDS 6.3

En kloss med masse m beveger seg til høyre med fart v_0, se figur. Ved $x = 0$ m treffer klossen på en fjær som har fjærkonstanten k og likevektslengden l_0. Fjæren følger Hookes lov. Klossen er momentant i ro ved $x = d$.



a) Finn arbeidet som fjærkraften gjør mens klossen beveger seg fra $x = 0$ til $x = d$.

Løsning: Når fjæren komprimeres ($x > 0$) virker kraften i negativ x-retning, $F_k = -kx$.

$$W = \int_0^d (-kx)dx = -\frac{1}{2}kd^2$$

b) Hvor stor er d?

Løsning: Vi bruker arbeid-energi-teoremet, $W = K_1 - K_0$

$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

som gir

$$d = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 6.1

a) $v_1 = \sqrt{2gd\sin\alpha}$.

b) $v_1 = \sqrt{2gd\sin\alpha}$.

TDS 6.2

a) $4U_0$.

b) $\sqrt{2}x_0$.

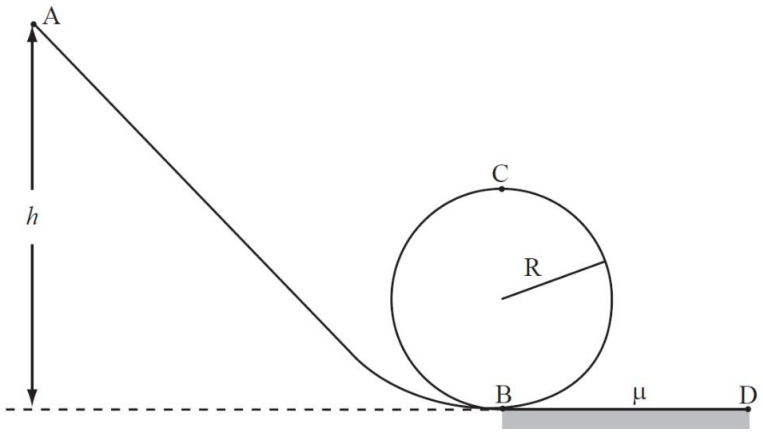
TDS 6.3

a) $W = -\frac{1}{2}kd^2$.

b) $d = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$.

Gruppeoppgaver

G 6.1



En blokk glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius R. Etter loopen stanser blokken i punkt D på et horisontalt bord med en ru overflate. Blokken starter i ro ved punkt A i høyde h over bordet. Friksjonen på rampen og i loopen er neglisjerbar. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom blokken og bordet er μ. Dersom du bruker bevaring av mekanisk energi, må du begrunne *hvorfor* den mekaniske energien er bevart.

a) Finn farten v_B av blokken ved punkt B før den går rundt loopen.

Løsning: Uten friksjon virker bare gravitasjon og mekanisk energi er bevart:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

b) Finn farten v_C ved punkt C.

Løsning: Mekanisk energi er fortsatt bevart med samme argumentasjon som i a:

$$U_A + K_A = U_C + K_C$$

$$mgh + 0 = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h-2R)}$$

c) Hva er betingelsen for farten v_C slik at blokken holder kontakt med loopen?

Løsning: I punkt C virker gravitasjon og normalkraften fra banen på blokken. Begge er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder sirkelen på banen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_C^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at $N > 0$

$$N = m\frac{v_C^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow v_C > \sqrt{Rg}$$

d) Hvor høyt over bordet må blokken slippes for å gå rundt loopen?

Løsning: Vi setter inn resultatet fra b, og kvadrerer på begge sider av ulikhetstegnet:

$$2g(h-2R) > Rg \Rightarrow h > \frac{5}{2}R$$

e) Hvor langt sklir blokken på bordet før den stanser?

Løsning: Friksjonskraften er den eneste kraften som gjør arbeid å blokken (normalkraft og tyngdekraft virker ikke i bevegelsesretningen). Siden den dynamiske friksjonskraften er konstant med størrelse $\mu_d N$ får vi:

$$W_{BD} = -\int_{x_B}^{x_D} \mu_d N dx = -\mu_d mg(x_D - x_B) = -\mu_d mgs$$

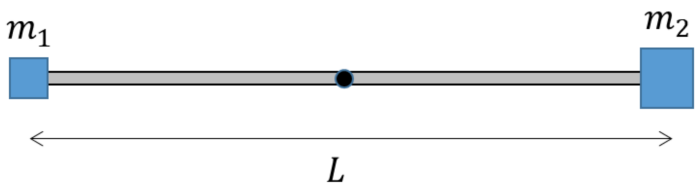
hvor vi har brukt $x_D - x_B = s$. Arbeid-energi-teoremet gir $W_{BD} = K(x_D) - K(x_B)$ og vi setter inn:

$$-\mu_d mgs = 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}m2gh$$

Da får vi at $s = \frac{h}{\mu}$.

G 6.2

En karbonfiber-stang med lengde $L = 1.0$ m og med neglisjerbar masse kan rotere uten friksjon om en akse gjennom midtpunktet sitt, se figur. To små blyklosser med masse $m_1 = 2.0$ kg og $m_2 = 3.0$ kg er festet i hver ende av stangen. Du holder stangen i horisontal posisjon, og slipper så systemet fri. Hva er farten til klossene når stangen kommer i vertikal posisjon? Du kan se bort fra luftmotstand.



Løsning: Når stangen roterer, beveger klossene seg på en sirkelbane. Kraften fra stangen på klossene gjør ikke noe arbeid fordi kraften står vinkelrett på bevegelsesretningen. Den eneste kraften som gjør arbeid er gravitasjonskraften, og den er konservativ. Vi kan derfor bruke at mekanisk energi er bevart: $U_H + K_H = U_V + K_V$, hvor H og V står for horisontal og vertikal posisjon. Vi legger nullpunktet på nivået hvor stangen er horisontal, slik at den potensielle energien U_H er null når stangen er horisontal. Systemet starter i ro, derfor er også den kinetiske energien K_H null. Med stangen i vertikal posisjon har den lille klossen positiv potensiell energi og er i høyde $L/2$, mens den er negativ for den store, i høyde $-L/2$. Begge klossene har samme fart v siden de roterer med samme vinkelfart. Vi får:

$$U_H + K_H = U_V + K_V = 0$$

$$U_V + K_V = m_1 g\frac{L}{2} - m_2 g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = 0$$

$$(m_1 - m_2)gL + (m_1 + m_2)v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)gL}{(m_1 + m_2)}} = 1.4 \text{ m/s}.$$

G 6.3

En fjær som ikke følger Hookes lov kan beskrives ved kraften $F(x) = -ax - bx^2$, hvor $a = 50$ N/m og $b = 15$ N/m^2. Massen til fjæren er neglisjerbar.

a) Finn den potensielle energien $U(x)$. Du kan velge $U(0) = 0$ J.

Løsning:

$$U(x) = -\int_0^x F(x)dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3$$

b) Et legeme med massen $m = 1.0$ kg er festet til fjæren og kan bevege seg horisontalt på en friksjonsfri overflate. Du trekker legemet til høyre i positiv x-retning for å strekke fjæren 1.0 m fra sin likevektslengde og slipper den. Hva er hastigheten når legemet er 0.50 m fra likevektslengden?

Løsning: Krafta er konservativ og mekanisk energi er bevart, dermed har vi $U(x_0) + K(x_0) = U(x_1) + K(x_1)$, slik at

$$\frac{a}{2}x_0^2 + \frac{b}{3}x_0^3 + 0 = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Da får vi

$$v_1 = \sqrt{\frac{a}{m}(x_0^2 - x_1^2) + \frac{2b}{3m}(x_0^3 - x_1^3)} = 6.8 \text{ m/s}.$$

Fasit til gruppeoppgaver

G 6.1

a) $v_B = \sqrt{2gh}$.

b) $v_C = \sqrt{2g(h-2R)}$.

c) $v_C > \sqrt{Rg}$.

d) $h > \frac{5}{2}R$.

e) $s = \frac{h}{\mu}$.

G 6.2

$v = 1.4$ m/s.

G 6.3

a) $\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3$.

b) 6.8 m/s.