Oppgavesett uke 7

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa. Vi minner om at Taylorrekka $T_n(x)$ av grad (orden) n til en funksjon $f(x)$ rundt et punkt $x = a$ er gitt ved

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

TDS 7.1 Taylorpolynom

a) Finn Taylorpolynomet av orden (grad) 3 til $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ rundt både $a = 0$ og $a = -1$. Kommentér svarene.

b) Finn de tre første leddene (dvs. Taylorpolynomet av grad 2) i Taylorrekken til $f(x) = \ln x$ rundt $a = 1$. Sett også opp et uttrykk for restleddet.

TDS 7.2 Annenordens differensialligninger

Finn den generelle løsningen til hver av de følgende differensialligningene. (Se formelark på Canvas om det trengs).

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0$

TDS 7.3 En kloss i en fjær

En kloss med masse m ligger på et friksjonsfritt underlag. Den er koblet sammen med en masseløs fjær som er festet i veggen. Vi antar at bevegelsen er endimensjonal og foregår i x-retning. Fjærkraften er gitt ved Hookes lov, $F_k(x) = k\Delta x = -kx$ (fjæras likevektslengde er lagt i $x = 0.0$ m).

a) Bruk Newtons andre lov til å sette opp en differensialligning for klossens bevegelse.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 7.1

a) $f(x;a=0) \approx 3+x+2x^2+x^3$, $f(x;a=-1) \approx 3+x+2x^2+x^3$.

b) $T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$, med restledd: $R_2(f(x);x=1) = \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-1)^3\right]$.

TDS 7.2

a) $y(x) = Ce^{-x} + De^{-3x}$.

b) $y(x) = Ee^{-\sqrt{3}x} + Fe^{\sqrt{3}x}$.

TDS 7.3

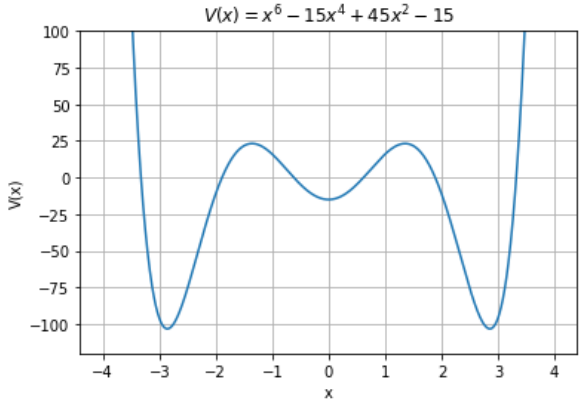
a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

b) $x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Gruppeoppgaver

G 7.1 Potensiell energi

Figuren viser et endimensjonalt potensial gitt ved $V(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$.

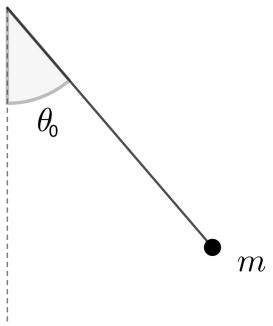


a) Bruk grafen til å identifisere stabile og ustabile likevektspunkter.

b) Se for deg at du har en friksjonsfri bane formet som dette potensialet. Hva skjer hvis du slipper en kule ned på banen i nærheten av et stabilt likevektspunkt?

c) Finn Taylorpolynomet av andre orden for potensialet rundt $x = 0$. Hvorfor forsvinner et av leddene i polynomet?

G 7.2 Pendel med luftmotstand [tidligere seminaroppgave og eksamensoppgave]



Figuren viser en pendel før den slippes. Vinkelen θ er målt mellom horisontalen og snora, og θ_0 er vinkelen (maks utslag) som pendelen har i det den slippes fra ro. Vi antar at snora er masseløs og stram. Dersom vi ser bort fra luftmotstand, så er akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning (vinkelakselerasjonen) gitt ved

$$a_T = -g \sin\theta \tag{1}$$

Pendelen beveger seg på en del av en sirkelbane, og vi bruker buelengden $L = l\theta$ langs bevegelsen til å uttrykke akselerasjonen som

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{2}$$

I denne oppgaven skal vi se hva som skjer når vi *tar med luftmotstand*. Vi skal bruke en luftmotstandskraft $\vec{F}_D$ gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på luftmotstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

a) I hvilken retning vil luftmotstandskraften virke på pendel-loddet?

b) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelfart ved å derivere buelengden med hensyn på tiden, og modifiser vinkelakselerasjonen i ligning (1) slik at den inkluderer luftmotstand.

c) Sett opp en differensiallikning for vinkelen θ.

d) Hvorfor er det hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensiallikningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensiallikningen fra c) slik at den kun inneholder ledd med θ og dens deriverte.

e) Sett opp et uttrykk for likningens analytiske løsning, og skriv et program som plotter bevegelsen over 20 s. Anta at pendelen slippes fra ro med en vinkel $\theta_0 = 15°$. Bruk $l = 1$ m, $D = 0.3$ kg/s og $m = 0.5$ kg.
Tips: Gjør gjerne algebraen enklere ved å re-definere konstanter som for eksempel $\frac{D}{2m} \equiv \alpha$, $\frac{g}{l} \equiv \beta^2$ *og* $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. *Generelt anbefaler vi å kun sette inn verdier helt til slutt i en utregning, og når man skal plotte figurer.*

Fasit til gruppeoppgaver

G 7.1

c) $V(x) \approx -15 + 45x^2$.

G 7.2

b) $a_T = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$.

c) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$.

d) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

e) $\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(\theta_0\cos(\gamma t) + \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)$.