Oppgavesett uke 7

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa. Vi minner om at Taylorrekka $T_n(x)$ av grad (orden) n til en funksjon $f(x)$ rundt et punkt $x = a$ er gitt ved

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

TDS 7.1 Taylorpolynom

a) Finn Taylorpolynomet av orden (grad) 3 til $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ rundt både $a = 0$ og $a = -1$. Kommentér svarene.

Løsning:

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 4x + 1$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 4$$
$$\frac{d^3f}{dx^3} = 6$$

Taylorpolynomet rundt $a = 0$ blir da

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{f(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}\frac{df(0)}{dx}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(0)}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f(0)}{dx^3}(x-0)^3 \\ &= 3 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

og polynomet rundt $a = -1$ blir

$$\begin{aligned} f(x) &\approx 3 + 0 - \frac{2}{2}(x+1)^2 + \frac{6}{6}(x+1)^3 \\ &= 3 - x^2 - 2x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= 3 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Vi ser at begge rekkeutviklingene gir oss tilbake det samme tredjegradspolynomet. Siden vi rekkeutviklet til tredje orden gir det mening at vi får tilbake et tredjegradspolynom.

b) Finn de tre første leddene (dvs. Taylorpolynomet av grad 2) i Taylorrekken til $f(x) = \ln x$ rundt $a = 1$. Sett også opp et uttrykk for restleddet.

Løsning: De tre første leddene er gitt ved

$$T_2(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2$$

med restledd

$$+\left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-a)^3\right]$$

der c er et tall innenfor intervallet (a,x). Vi har at

$$f(x=a=1) = 0$$

og de deriverte blir

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow df(a)dx = 1$$
$$\frac{d^2f(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2f(a)}{dx} = -1$$

Vi fyller inn og får at Taylorrekken av grad (orden) 2 med restledd i klammeparentes blir

$$T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-1)^3\right]$$

Her er c en konstant (kalt ξ i formelarket) som har en verdi mellom x og $a = 1$.

TDS 7.2 Annenordens differensialligninger

Finn den generelle løsningen til hver av de følgende differensialligningene. (Se formelark på Canvas om det trengs).

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = 0$

Løsning:

a) Dette er en annenordens homogen differensiallikning, så vi begynner med å finne røttene til det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} = -2 \pm 1$$

Løsningen blir da

$$y(x) = Ce^{\lambda_1 x} + De^{\lambda_2 x} = Ce^{-x} + De^{-3x}$$

b) Dette er også en annenordens homogen differensialligning, så vi går fram på samme måte som i a):

$$\lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y(x) = Ee^{-\sqrt{3}x} + Fe^{\sqrt{3}x}$$

TDS 7.3 En kloss i en fjær

En kloss med masse m ligger på et friksjonsfritt underlag. Den er koblet sammen med en masseløs fjær som er festet i veggen. Vi antar at bevegelsen er endimensjonal og foregår i x-retning. Fjærkraften er gitt ved Hookes lov, $F_k(x) = k\Delta x = -kx$ (fjæras likevektslengde er lagt i $x = 0.0$ m).

a) Bruk Newtons andre lov til å sette opp en differensialligning for klossens bevegelse.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen.

Løsning:

a) Den eneste kraften som virker er fjærkraften F_k, som er gitt ved $F_k = -k\Delta x = -kx$. Newtons andre lov gir da

$$\Sigma F_x = F_k = -kx = ma \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

b) Dette er en homogen, lineær andreordens differensiallikning, så vi finner først det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

Den generelle løsningen blir da

$$x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 7.1

a) $f(x;a=0) \approx 3+x+2x^2+x^3$, $f(x;a=-1) \approx 3+x+2x^2+x^3$.

b) $T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$, med restledd: $R_2(f(x);x=1) = \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3f(c)}{dx^3}(x-1)^3\right]$.

TDS 7.2

a) $y(x) = Ce^{-x} + De^{-3x}$.

b) $y(x) = Ee^{-\sqrt{3}x} + Fe^{\sqrt{3}x}$.

TDS 7.3

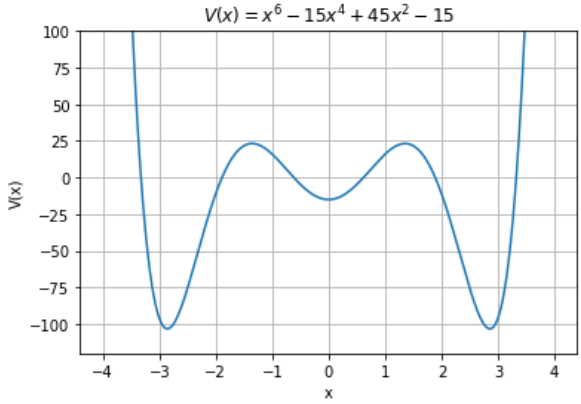
a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

b) $x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Gruppeoppgaver

G 7.1 Potensiell energi

Figuren viser et endimensjonalt potensial gitt ved $V(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$.



a) Bruk grafen til å identifisere stabile og ustabile likevektspunkter.

Løsning: Potensialet har stabile likevektspunkter i $x = 0$ og cirka $x = \pm 3$, og ustabile likevektspunkter i cirka $x = \pm 1.5$.

b) Se for deg at du har en friksjonsfri bane formet som dette potensialet. Hva skjer hvis du slipper en kule ned på banen i nærheten av et stabilt likevektspunkt?

Løsning: Kula vil oscillere rundt bunnpunktet, ved å skli opp til samme høyde som den ble sluppet fra på begge sider av bunnpunktet.

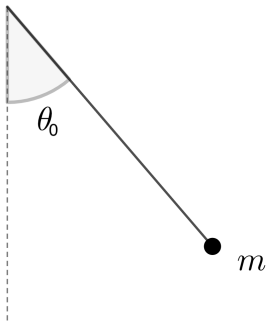
c) Finn Taylorpolynomet av andre orden for potensialet rundt $x = 0$. Hvorfor forsvinner et av leddene i polynomet?

Løsning:

$$\frac{dV(x)}{dx} = 6x^5 - 60x^3 + 90x$$
$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 30x^4 - 180x^2 + 90$$
$$\frac{d^3V(x)}{dx^3} = 120x^3 - 360x$$

Taylorpolynomet blir da $V(x) \approx V(0) + \frac{dV(0)}{dx}(x-0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2V(0)}{dx^2}(x-0)^2 = -15 + 45x^2$. Førsteordensleddet forsvinner fordi den førstederiverte er lik null i et ekstremalpunkt.

G 7.2 Pendel med luftmotstand [tidligere seminaroppgave og eksamensoppgave]



Figuren viser en pendel før den slippes. Vinkelen θ er målt mellom horisontalen og snora, og θ_0 er vinkelen (maks utslag) som pendelen har i det den slippes fra ro. Vi antar at snora er masseløs og stram. Dersom vi ser bort fra luftmotstand, så er akselerasjonen til pendelen i tangentiell retning (vinkelakselerasjonen) gitt ved

$$a_T = -g\sin\theta \tag{1}$$

Pendelen beveger seg på en del av en sirkelbane, og vi bruker buelengden $L = l\theta$ langs bevegelsen til å uttrykke akselerasjonen som

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{2}$$

I denne oppgaven skal vi se hva som skjer når vi *tar med luftmotstand*. Vi skal bruke en luftmotstandskraft $\vec{F}_D$ gitt ved

$$\vec{F}_D = -D\vec{v}$$

der D er en konstant som beskriver størrelsen på luftmotstanden, og $\vec{v}$ er pendelens hastighet.

a) I hvilken retning vil luftmotstandskraften virke på pendel-loddet?

Løsning: I en sirkelbane vil hastighetsvektoren alltid være tangentiell til bevegelsen, så luftmotstanden vil virke i tangentiell retning.

b) Uttrykk luftmotstandskraften som en funksjon av vinkelfart ved å derivere buelengden med hensyn på tiden, og modifiser vinkelakselerasjonen i ligning (1) slik at den inkluderer luftmotstand.

Løsning: Dersom vi deriverer buelengden $L = l\theta$ med hensyn på tid, får vi at farta er $v = l\frac{d\theta}{dt}$. Luftmotstandskraften blir derfor

$$\vec{F}_D = -Dl\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_T$$

med enhetsvektor $\hat{u}_T$ i tangentiell retning. Ved å bruke N2L får vi da

$$ma_T = -mg\sin(\theta) - Dl\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow a_T = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

c) Sett opp en differensiallikning for vinkelen θ.

Løsning: Fra deloppgave a) har vi at den tangentielle akselerasjonen kan skrives som $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Vi kan derfor sette

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$$

Differensiallikningen for vinkelen blir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

d) Hvorfor er det hensiktsmessig å Taylorutvikle $\sin(\theta)$ rundt 0 for denne differensiallikningen? Bruk Taylorutviklingen til første orden til å skrive om differensiallikningen fra c) slik at den kun inneholder ledd med θ og dens deriverte.

Løsning: Pendelen har et stabilt likevektspunkt i $\theta = 0$, som betyr at den vil oscillere rundt $\theta = 0$ når den slippes fra en relativt liten vinkel.

$$\sin(\theta) \approx \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}(\theta - 0) + \ldots = \theta + \ldots$$

Differensiallikningen blir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

e) Sett opp et uttrykk for likningens analytiske løsning, og skriv et program som plotter bevegelsen over 20 s. Anta at pendelen slippes fra ro med en vinkel $\theta_0 = 15°$. Bruk $l = 1$ m, $D = 0.3$ kg/s og $m = 0.5$ kg.
Tips: Gjør gjerne algebraen enklere ved å re-definere konstanter som for eksempel $\frac{D}{2m} \equiv \alpha$, $\frac{g}{l} \equiv \beta^2$ *og* $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. *Generelt anbefaler vi å kun sette inn verdier helt til slutt i en utregning, og når man skal plotte figurer.*

Løsning: Likningen er en homogen annenordens difflikning på formen $\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$. For å løse den, begynner vi med å finne det karakteristiske polynomet.

$$\lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{g}{l}}$$

Vi bruker tipset, og får da

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

Ved å sette inn verdier for D, m, g og l får man at uttrykket under rottegnet er negativt. Vi kan da skrive

$$\lambda = -\alpha \pm \gamma i$$

som betyr at den generelle løsningen er

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)\right)$$

Deriverer løsningen med hensyn på tid, og får

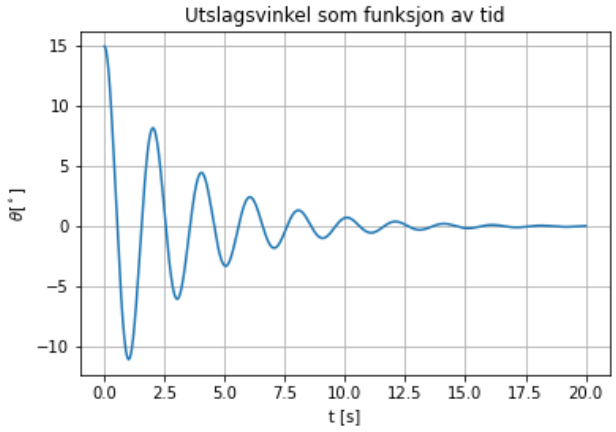
$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}\left(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)\right) + e^{-\alpha t}\left(-\gamma A\sin(\gamma t) + \gamma B\cos(\gamma t)\right)$$

Initialbetingelsene gir da

$$\theta(0) = \theta_0 = A \Rightarrow A = \theta_0$$
$$\frac{d\theta(0)}{dt} = 0 = -\alpha A + \gamma B \Rightarrow B = \frac{\alpha A}{\gamma} = \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}$$

som betyr at den partikulære løsningen er

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(\theta_0\cos(\gamma t) + \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)$$



Kode for plottet er i tillegget bakerst.

Fasit til gruppeoppgaver

G 7.1

c) $V(x) \approx -15 + 45x^2$.

G 7.2

b) $a_T = -g\sin(\theta) - \frac{Dl}{m}\frac{d\theta}{dt}$.

c) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$.

d) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

e) $\theta(t) = e^{-\alpha t}\left(\theta_0\cos(\gamma t) + \frac{\alpha\theta_0}{\gamma}\sin(\gamma t)\right)$.

Løsning:

Kode

Dempet pendel

```
1  # Python-script for pendel med luftmotstand
2  # Ann-Cecilie, 3 Oct 2022
3  # Based on Joakim's suggestion
4  # Last update: 29 Feb 2024
5  # a.c.larsen@fys.uio.no
6
7  # Importerer bibliotek
8  import numpy as np
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 # Definerer konstanter
12 g = 9.81 # tyngdeakselerasjon (m/s^2)
13 l = 1.0 # lengden paa pendelen, radien i sirkelbanen (m)
14 b = 0.3 # (kg/s)
15 m = 0.5 # (kg)
16
17 alpha = b/(2*m)
18 beta  = np.sqrt(g/l)
```

```
19 gamma = np.sqrt(beta**2 - alpha**2)
20
21 theta0 = 15 * np.pi / 180 # (radianer)
22
23 C1 = theta0
24 C2 = alpha*C1/gamma
25 t = np.linspace(0, 20, 10001) #[s]
26 theta = np.exp(- alpha*t)*(C1*np.cos(gamma*t) + C2*np.sin(gamma*t))
27 plt.plot(t, theta*180/np.pi)
28 plt.title('Utslagsvinkel som funksjon av tid')
29 plt.xlabel('t [s]')
30 plt.ylabel(r'$\theta [^\circ]$')
31 #plt.grid()
32 plt.savefig('theta_dempet.png')
33 plt.show()
```