Oppgavesett uke 10

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa.

TDS 10.1 En vifte

En vifte slås av og vinkelfarten avtar jevnt fra 400 til 200 omdreininger per minutt i løpet av 4.00 sekunder.

a) Finn vinkelakselerasjonen til viften.

Løsning: Siden vinkelfarten avtar jevnt, er vinkelakselerasjonen α konstant:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(200 \cdot 2\pi/60) - (400 \cdot 2\pi/60)}{4.00\text{s}} = -5.24\text{rad/s}$$

b) Hvor mange omdreininger gjorde viften i løpet av disse 4.00 sekundene?

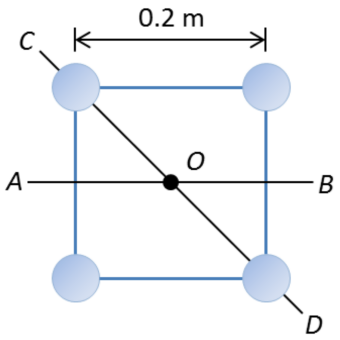
Løsning: For bevegelser med konstant vinkelakselerasjon har vi:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{400 \cdot 2\pi}{60\text{s}} \cdot 4.00\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5.24\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (4.00)\text{s}^2 = 125.63\text{rad}$$

For å finne antall omdreininger, bruker vi at en omdreining er 2π rad, så vi får:

$$\frac{125.66\text{rad}}{2\pi\text{rad/omdreining}} = 20.0 \text{ omdreininger.}$$

TDS 10.2 Treghetsmoment



Fire små kuler med masse $m = 0.20$ kg arrangeres i et kvadrat med sider 0.20 m som vist i figuren. Kulene kan betraktes som punktmasser og forbindelsen mellom kulene betraktes som vektløs. Finn treghetsmomentet til legemet for en akse

a) som går gjennom senteret O vinkelrett på planet.

Løsning: Fra Pytagoras så finner vi at avstanden mellom massene og rotasjonsaksen er $\rho_i = \sqrt{(0.10\text{m})^2 + (0.10\text{m})^2}$ for alle fire kulene. Siden vi betrakter kulene som punktmasser, får vi treghetsmomentet

$$I_O = \sum_i m_i \rho_i^2 = 4 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.020\text{m}^2 = 0.016\text{kg m}^2$$

b) AB som halverer kvadratet.

Løsning: For denne aksen har vi $\rho_i = 0.10$ m for alle kulene.

$$I_{AB} = 4 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.010\text{m}^2 = 0.0080\text{kg m}^2$$

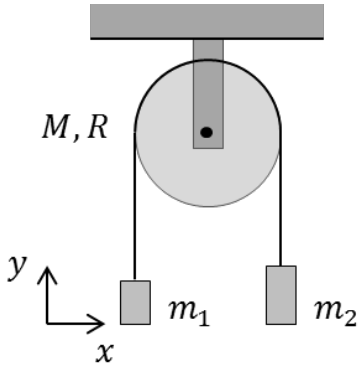
c) CD som går diagonalt gjennom to hjørner av kvadratet.

Løsning: Her har vi at to kuler har avstand $\rho_i = 0\text{m}$ fra aksen og bidrar dermed ikke, og to kuler har avstanden $\rho_i = \sqrt{(0.10\text{m})^2 + (0.10\text{m})^2}$. Dermed får vi:

$$I_{CD} = 2 \cdot 0.20\text{kg} \cdot 0.020\text{m}^2 = 0.0080\text{kg m}^2$$

TDS 10.3 Lodd og trinse

To lodd med massene m_1 og $m_2 > m_1$ er knyttet sammen med en masseløs snor som går over et hjul med massen M og radien R. Hjulet kan rotere om en stasjonær akse (ingen friksjon mellom hjulet og aksen), og treghetsmomentet er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Opprinnelig er loddene på samme høyde $y = 0$. Når du slipper loddene fri synker m_2 ned, mens m_1 går opp uten at snoren sklir over hjulet. Finn farten til loddene som funksjon av den vertikale posisjonen. Du kan se bort fra luftmotstand.



Løsning: Uten (glide)friksjon og luftmotstand er det bare gravitasjon som gjør et arbeid på klossene, og den mekaniske energien i systemet er bevart. Snora er i kontakt med hjulet men sklir ikke, dvs. det er statisk friksjon i hvert kontaktpunkt mellom snora og hjulet. Med definisjonen av koordinatsystemet som vist i figuren, er den potensielle energien til loddene i begynnelsen null. Etterhvert får m_1 positiv og m_2 negativ potensiell energi, og begge to får kinetisk energi. Trinsen befinner seg ved høyde h og har potensiell energi som er konstant siden massesenteret til trinsen ikke beveger seg, men trinsen får kinetisk rotasjonsenergi. Vi setter opp en ligning hvor vi bruker bevaring av mekanisk energi:

$$Mgh = m_1gy - m_2gy + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + Mgh + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Loddet m_1 går like mye opp som m_2 går ned med samme hastighet v. Siden snoren ikke sklir over trinsen vet vi at et punkt på overflaten til trinsen beveger seg med samme fart v som snoren, og vi finner en relasjon mellom vinkelfart og hastighet til snoren, $\omega = \frac{v}{R}$. Vi får da

$$0 = (m_1 - m_2)gy + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2} = (m_1 - m_2)gy + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)v^2$$

som gir

$$v = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}2gy}.$$

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 10.1

a) $\alpha = -5.24$ rad/s.

b) 20.0 omdreininger.

TDS 10.2

a) $I_O = 0.016\text{kg m}^2$.

b) $I_{AB} = 0.0080$ kg m^2.

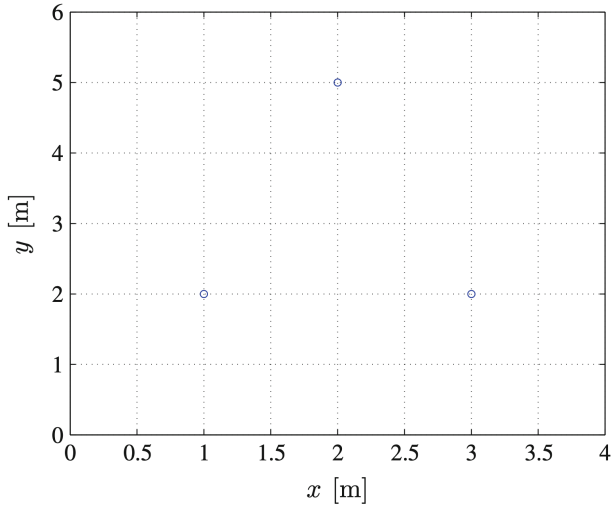
c) $I_{CD} = 0.0080\text{kg m}^2$.

TDS 10.3

$v = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} 2gy}$.

Gruppeoppgaver

G 10.1 Et tre-partikkelsystem



Tre partikler med lik masse $m = 1.0$ kg er plassert som vist i figuren.

a) Hva er massesenteret til dette systemet bestående av de tre partiklene?

Løsning: Vi bruker formelen for massesenter:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i,$$

med totalmassen $M = \sum_i m_i$. Vi tar X- og Y-komponenten hver for seg:

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{1.0\text{kg}(1.0+2.0+3.0)\text{ m}}{3\text{ kg}} = 2.0\text{ m}.$$

$$Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{1.0\text{kg}(2.0+5.0+2.0)\text{ m}}{3\text{ kg}} = 3.0\text{ m}.$$

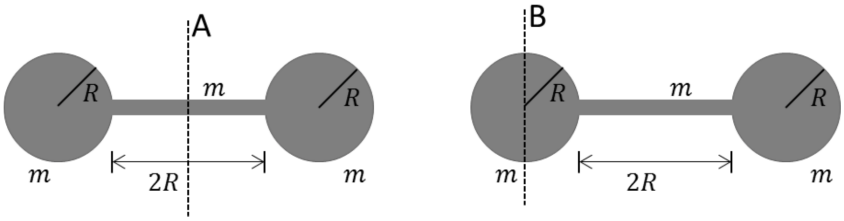
$$\vec{R} = 2.0\text{ m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{ m}\hat{\mathbf{j}}.$$

b) Hvordan kan du legge til en fjerde partikkel til dette systemet uten å forandre posisjonen til massesenteret?

Løsning: Ved å plassere den fjerde partikkelen akkurat i massesenteret til de tre partiklene.

G 10.2 Treghetsmoment til en håndvekt

En håndvekt består av to kuler med masse m og radius R, og en tynn stav med samme masse m og lengde $L = 2R$. Treghetsmomentet for en kule som roterer om en akse gjennom sitt massesenter er $I_k = \frac{2}{5}mR^2$, mens treghetsmomentet for en tynn stav som roterer om en akse som er vinkelrett på staven gjennom massesenteret er $I_s = \frac{1}{12}mL^2$.



a) Finn treghetsmomentet for håndvekten når den roterer om akse A (venstre del av figuren).

Løsning: Vi finner først treghetsmomentet til kulene om aksen A. Massesenteret til kulene er i en avstand $2R$ fra akse A. Vi finner treghetsmomentet til én kule ved å bruke parallellakseteoremet:

$$I_{A,k} = I_k + m(2R)^2 = \left(\frac{2}{5} + 4\right) mR^2 = \frac{22}{5}mR^2.$$

Treghetsmomentet for hele håndvekta (to kuler og stanga) er da gitt ved:

$$I_A = 2I_{A,k} + I_s = \frac{44}{5}mR^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{137}{15}mR^2.$$

b) Finn treghetsmomentet for håndvekten når den roterer om akse B (høyre del av figuren).

Løsning: For å finne treghetsmomentet om akse B bruker vi parallellakseteoremet for staven og én kule, og legger til treghetsmomentet for den andre kula hvor rotasjonsaksen går gjennom massesenteret. Vi kaller kula hvor akse B går igjennom for kule 1, og den andre for kule 2. Da har vi for kule 1:

$$I_{B,k1} = I_k = \frac{2}{5}mR^2.$$

For kule 2 får vi med parallellakseteoremet:

$$I_{B,k2} = I_k + m(4R)^2 = \frac{2}{5}mR^2 + 16mR^2.$$

For stanga får vi med parallellakseteoremet:

$$I_{B,s} = I_s + m(2R)^2 = \frac{1}{12}m(2R)^2 + m(2R)^2$$

Tilsammen får vi:

$$I_B = I_{B,k1} + I_{B,k2} + I_{B,s} = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{2}{5}mR^2 + 16mR^2 + \frac{1}{12}m(2R)^2 + m(2R)^2$$

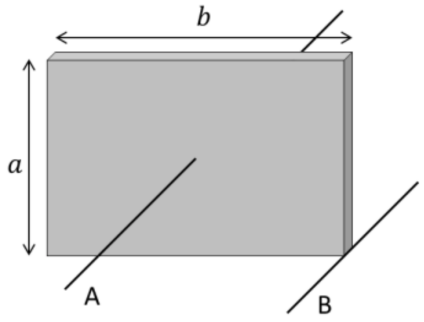
$$I_B = \left(\frac{4}{5} + 16 + \frac{1}{3} + +4\right) mR^2 = \frac{317}{15}mR^2.$$

Alternativt (og enklere) kan vi bruke resultatet i forrige deloppgave for akse A og parallellaksete-oremet for hele legemet:

$$I_B = I_A + 3m(2R)^2 = \frac{137}{15}mR^2 + 12mR^2 = \frac{317}{15}mR^2.$$

G 10.3 Treghetsmoment til en plate

Treghetsmomentet til en tynn, rektangulær plate med sidelengde a og b og masse M som roterer om en vinkelrett akse A gjennom massesenteret er gitt ved $I_A = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$. Finn treghetsmomentet I_B for rotasjon om akse B gjennom et av hjørnepunktene til platen.



Løsning: Siden akse A går gjennom massesenteret, kan vi bruke parallellakseteoremet (Steiners sats) for å beregne treghetsmomentet om akse B ved $I_B = I_A + Ms^2$, hvor s er avstanden fra massesen-teret og ut til hjørnet. Vi bruker Pytagoras og finner

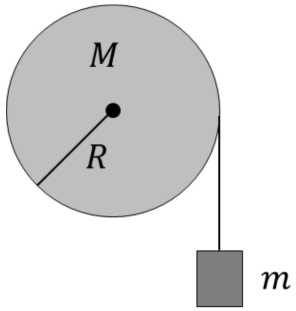
$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Da blir treghetsmomentet

$$I_B = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) + M \cdot \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2).$$

G 10.4 En eske og en sylinder

En eske med masse $m = 1.0$ kg er festet til enden av en masseløs snor som er viklet rundt en sylinder med masse M og radius $R = 0.10$ m. Når systemet slippes fri, beveger esken seg nedover og sylinderen roterer. Hva må massen M til sylinderen være for at sylinderen og esken skal ha samme kinetiske energi? Hva endrer seg hvis sylinderen har radius $R = 0.20$ m?



Løsning: Kinetisk energi til esken og sylinderen skal være like, dvs.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

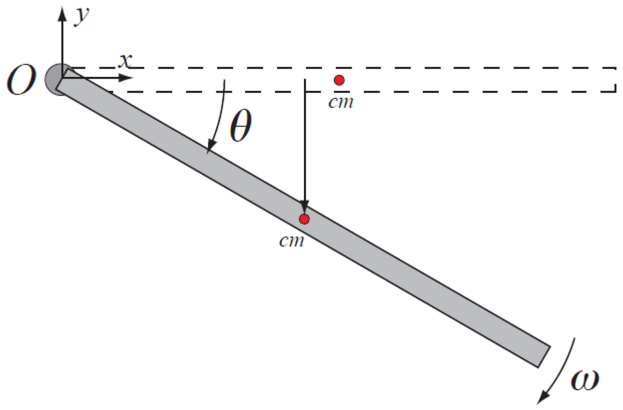
Siden snora er viklet rundt sylinderen, er lineær- og vinkelfart relatert ved $v = \omega R$. Treghetsmomentet til en full sylinder som roterer om symmetriaksen er $I_s = \frac{1}{2}MR^2$. Vi setter inn og får:

$$\frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow M = 2m.$$

Dette resultatet gjelder uavhengig av radien til sylinderen, så det blir ingen endring om $R = 0.20$m.

G 10.5 En stav i et hengsel

En stav med homogen massefordeling er festet til taket i den ene enden. Hengselet som staven er festet i er friksjonsfritt. Staven er i horisontal posisjon i ro, og så slippes den. Origo legges i opphengspunktet, se figur. Staven har lengde L og masse M, og i starten er vinkelen $\theta = \theta_0 = 0$. Vi ser bort fra luftmotstand. Treghetsmomentet til en stav som roterer om en akse gjennom sitt massesenter er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Hva er vinkelfarten som staven får?



Løsning: Fra eksempel 15.4.1 i læreboka. Siden vi ser bort fra luftmotstand og friksjon, kan vi bruke bevaring av mekanisk energi. Det er en normalkraft i hengselet, men den vil alltid være normalt på bevegelsesretningen til massesenteret til staven og gjør ikke noe arbeid. Den kinetiske rotasjonsenergien til staven er gitt ved:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2,$$

hvor I_z er treghetsmomentet til staven om z-aksen og ω er vinkelfarten til staven om origo. I tillegg har staven en potensiell energi

$$U = MgY,$$

hvor Y er høyden til massesenteret. Siden staven er homogen, er massesenteret plassert midt i staven, en lengde $L/2$ fra opphengspunktet. Det betyr at høyden $Y(t)$ er gitt ved $Y(t) = -\frac{L}{2}\sin\theta(t)$. Nå bruker vi bevaring av mekanisk energi: siden staven er i ro ved $t_0 = 0$s, så er $K_0 = 0$J, og siden vi har valgt å legge koordinatsystemet med origo i opphengspunktet, er også høyden $Y_0 = 0$m i starten. Derfor er $E_0 = K_0 + Y_0 = 0$J. Etter en tid t_1 roterer staven om opphengspunktet. Da har vi:

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta.$$

Siden $E_0 = E_1 = 0$ får vi:

$$\frac{1}{2}I_z\omega^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

$$I_z\omega^2 = MgL\sin\theta$$

og vi får at vinkelfarten er gitt ved

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_z}\sin\theta}.$$

Nå kan vi sette inn for I_z, vi bruker parallellakseteoremet og finner at treghetsmomentet for staven ved rotasjon om hengselet er: $I_z = \frac{1}{3}ML^2$. Vi får:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{ML^2/3}\sin\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}.$$

Fasit til gruppeoppgaver

G 10.1

a) $\vec{R} = 2.0\ \text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\ \text{m}\hat{\mathbf{j}}$.

G 10.2

a) $I_A = \frac{137}{15}mR^2$.

b) $I_B = \frac{317}{15}mR^2$.

G 10.3

$I_B = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$.

G 10.4

$M = 2m$.

G 10.5

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$.