Oppgavesett uke 11

"Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa.

TDS 11.1 En rocke-ring

En rocke-ring med masse $M = 1.0$ kg og radius $R = 0.50$ m ruller langs gulvet med konstant vinkelfart $\omega = 4.0$ rad/s uten å skli. Treghetsmomentet til rocke-ringen om rotasjonsaksen som går gjennom massesenteret er $I_z = MR^2$.

a) Finn farten til massesenteret langs gulvet.

Løsning: Vi bruker rullebetingelsen:

$$v_{cm} = R\omega = 0.50\text{m} \cdot 4.0\text{rad/s} = 2.0\text{m/s}.$$

b) Hvor mye kinetisk energi har rocke-ringen?

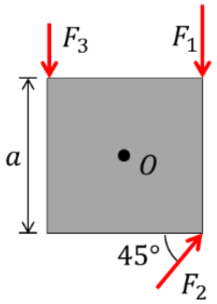
Løsning: Vi må ta hensyn til både den lineære bevegelsen og rotasjonsbevegelsen til ringen:

$$K_{tot} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2,$$

når vi setter inn tallene får vi $K_{tot} = 4.0$ J.

TDS 11.2 Krefter på en plate

En kvadratisk plate med sidelengde $a = 0.20$ m kan rotere om en akse som er vinkelrett på platen gjennom senteret O. Beregn netto-kraftmomentet om denne aksen når tre krefter virker som vist i figuren. Størrelsen til kreftene er $F_1 = 10$ N, $F_2 = 12$ N og $F_3 = 6.0$ N. Alle tre kreftene virker i det samme planet som platen.



Løsning: Vi legger koordinatsystemet med origo i O, z-aksen er rotasjonsaksen opp gjennom O og platen er i xy-planet. Kreftene $\vec{F}_2$ og $\vec{F}_3$ gir et positivt kraftmoment om z-aksen, mens $\vec{F}_1$ gir et negativt kraftmoment. Vi får:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (\frac{1}{2}a\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}a\hat{\mathbf{j}}) \times (-F_1\hat{\mathbf{j}}) = -\frac{1}{2}aF_1\hat{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\frac{1}{2}a\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}a\hat{\mathbf{j}}) \times (F_2\cos(45^\circ)\hat{\mathbf{i}} + F_2\sin(45^\circ)\hat{\mathbf{j}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}aF_2\hat{\mathbf{k}},$$

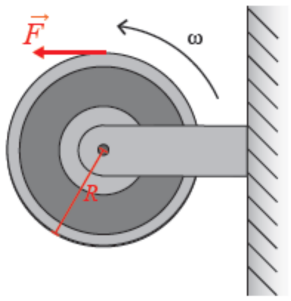
$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = (-\frac{1}{2}a\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}a\hat{\mathbf{j}}) \times (-F_3\hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{2}aF_3\hat{\mathbf{k}}.$$

Summen av kraftmomentene blir:

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \frac{1}{2}a(-F_1 + \sqrt{2}F_2 + F_2) = 1.3\hat{\mathbf{k}}\ \text{Nm}.$$

TDS 11.3 Kraft på et hjul

Et hjul med radius $R = 0.100$ m roterer uten friksjon om en stasjonær horisontal akse gjennom sitt massesenter, se figur. En konstant kraft med størrelse $F = 100$ N virker på kanten på hjulet (avstand R fra rotasjonsaksen) i tangentiell retning. Hjulet starter i ro, og etter at kraften har virket i en tid fra $t_0 = 0.00$ s til $t_1 = 2.00$ s roterer hjulet med 10.0 omdreininger per sekund. Hvor stort er treghetsmomentet I til hjulet om rotasjonsaksen?



Løsning: Den konstante, tangentielle kraften $\vec{F}$ gir et kraftmoment τ på hjulet, med størrelse (Newtons 2. lov for rotasjoner):

$$|\vec{\tau}| = RF = I\alpha,$$

hvor I er treghetsmomentet til hjulet om rotasjonsaksen og α er vinkelakselerasjonen. Siden kraften er konstant er vinkelakselerasjonen konstant, og vi har $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Siden hjulet starter i ro er $\omega_0 = 0$ rad/s:

$$\alpha = \frac{\omega(t_1)}{t_1} = \frac{10.0 \cdot 2\pi}{2.00\ \text{s}^2} = 10\pi\ \text{s}^{-2}.$$

Da får vi:

$$I = \frac{RF}{\alpha} = \frac{0.100\ \text{m} \cdot 100\ \text{N}}{10\pi\ \text{s}^{-2}} = 0.318\ \text{kg m}^2.$$

Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

TDS 11.1

a) $v_{cm} = 2.0$m/s..

b) $K_{tot} = 4.0$ J

TDS 11.2

$\vec{\tau}_{net} = 1.3\hat{\mathbf{k}}$ Nm.

TDS 11.3

$I = 0.318$ kg m^2.

Gruppeoppgaver

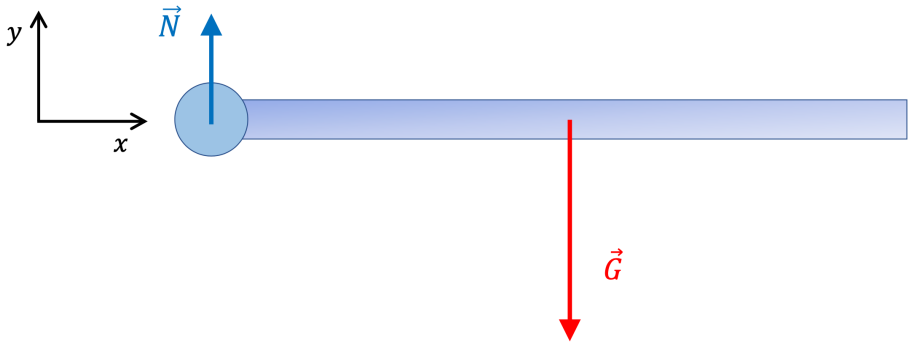
G 11.1 En stav som roterer

En lang, tynn stav med masse $m = 1.0$ kg og lengde $L = 1.0$ m er festet i et hengsel ved den ene enden og kan rotere uten friksjon i hengselet og uten luftmotstand (se figur). Når den frie enden slippes fra en horisontal posisjon, roterer staven. Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om et av endepunktene er $I = \frac{1}{3}mL^2$.



a) Tegn et frilegemediagram når staven er horisontal (rett etter at den er sluppet i enden, hvor den fortsatt ikke har noen vinkelfart) og finn størrelsen og retning på alle krefter og kraftmomenter som virker.

Løsning: Det virker gravitasjon $\vec{G}$ og normalkraft $\vec{N}$ fra hengselet.



Siden normalkraften angriper i rotasjonspunktet er kraftmomentet fra normalkraften null. Tyngdekraften angriper i massesenteret til staven, har størrelse $G = mg = 9.8$ N, retning nedover (negativ y-retning i figuren).

$$\tau_G = \frac{1}{2}mLg = 4.9 \text{ Nm}.$$

For å finne normalkraften bruker vi Newtons 2. lov i y-retning:

$$\sum F_{ext,y} = N - mg = ma_y = ma_{cm}.$$

Hva er akselerasjonen til staven i det tidspunktet staven slippes? Den har fortsatt ikke rukket å komme i bevegelse, så den har foreløpig ingen sentripetalakselerasjon (som ville pekt inn mot

hengselet). Men hva med den tangentielle akselerasjonen a_{cm} til massesenteret? Den er ikke null (siden staven jo vil bevege seg), men gitt ved $a_{cm} = r_{cm}\alpha$ hvor α er vinkelakselerasjonen. I tillegg har vi Newtons 2. lov for rotasjoner: $\tau_O = I_O\alpha$. Det er kraftmomentet til tyngdekraften som gir en vinkelakselerasjon til staven om en rotasjonsakse som går gjennom hengselet, vi får:

$$\alpha = \frac{\tau_G}{I_{hengsel}} = \frac{\frac{1}{2}mLg}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}.$$

Dermed blir

$$a_{cm} = r_{cm}\alpha = \frac{1}{2}L \cdot \frac{3}{2}\frac{g}{L} = \frac{3}{4}g.$$

Hva med retningen? Slik vi har definert koordinatsystemet, er denne akselerasjonen i negativ y-retning,

$$\vec{a}_{cm} = -\frac{3}{4}g\hat{\mathbf{j}}.$$

Da finner vi tilslutt:

$$N - mg = ma_{cm} \Rightarrow N = m(g - \frac{3}{4}g) = \frac{1}{4}mg = 2.5 \text{ N}.$$

b) Finn vinkelhastigheten til staven når staven har kommet i en vertikal posisjon.

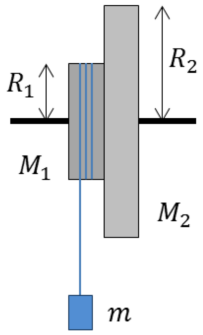
Løsning: Siden staven roterer uten friksjon eller luftmotstand er mekanisk energi bevart. Staven starter i ro og med potensiell energi null, dermed null mekanisk energi i starten. Massesenteret ligger i geometrisk sentrum av staven, og kommer til en posisjon (høyde) $-L/2$ når staven har kommet i en vertikal posisjon. Vi får:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 5.4 \text{ s}^{-1},$$

retning i negativ z-retning.

G 11.2 Metallsylindere



To metallsylindere med masse $M_1 = 1.0$ kg og $M_2 = 2.0$ kg og med radier $R_1 = 0.10$ m og $R_2 = 0.20$ m er montert på en akse som går gjennom massesenteret til begge sylindrene. Aksen roterer friksjonsfritt, og sylindrene er sveiset sammen slik at de roterer som ett legeme. Treghetsmomentet til en full sylinder som roterer om sitt massesenter er $I = \frac{1}{2}MR^2$.

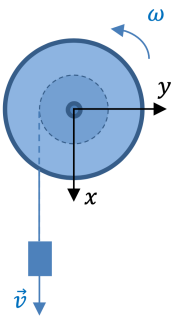
a) Finn treghetsmomentet til hele legemet (de sammensveisede sylindrene).

Løsning: Treghetsmoment til hele legemet er summen av treghetsmomentene for begge sylinderne (superposisjonsprinsippet):

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 = 0.045\text{kg m}^2.$$

b) En masseløs snor er viklet rundt den lille sylinderen, og et lodd med masse $m = 1.5$ kg henger fra enden av snoren. Når loddet slippes begynner de sammensveisede sylindrene å rotere uten at snoren sklir. Hvor stor er akselerasjonen til loddet?

Løsning: Loddet er påvirket av gravitasjon og snordraget T. Vi ser på systemet fra siden, med flaten til den store sylinderen mot oss og med rotasjonsaksen "opp fra arket", se figur:



Vi legger positiv x-akse ned, positiv y-akse til høyre, positiv z-akse (rotasjonsaksen) "opp fra arket". Newtons andre lov på loddet i x-retning gir:

$$mg - T = ma$$

hvor akselerasjonen her vil være i positiv x-retning slik vi har definert koordinatsystemet, og snordraget på loddet er i negativ x-retning. Akselerasjonen er koblet til vinkelakselerasjonen til skivene gjennom snoren (fra derivasjon av $v = \omega R_1$):

$$a = R_1\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R_1}.$$

Snordraget på skivene virker i positiv x-retning, og er årsak til et kraftmoment som setter skivene i rotasjon. Newtons 2. lov for rotasjoner om z-aksen gir oss:

$$\tau = R_1T = I_{tot}\alpha = I_{tot}\frac{a}{R_1} \Rightarrow T = I_{tot}\frac{a}{R_1^2}.$$

Vi setter inn snordraget vi fant her inn i ligningen fra N2L på loddet og løser for akselerasjonen til loddet:

$$mg - I_{tot}\frac{a}{R_1^2} = ma \Rightarrow a = \frac{g}{1+\frac{I_{tot}}{mR_1^2}} = 2.5\text{m/s}^2.$$

c) Hvor stor er akselerasjonen til loddet når snoren vikles om den store sylinderen?

Løsning: Hvis snoren vikles om den store sylinderen, blir alt likt men vi må erstatte R_1 med R_2:

$$a = \frac{g}{1+\frac{I_{tot}}{mR_2^2}} = 5.6\text{m/s}^2.$$

G 11.3 En motorsykkel i farta

En motorsykkel kjører rundt på innsiden av en vertikal sylinder med radien R. For at motorsykkelen ikke skal velte må den ha en vinkel θ i forhold til normalen ut fra veggen (i forhold til horisontalen). Anta at farten til motorsykkelen er v og at friksjonen mellom dekkene og veggen er stor nok til at den ikke sklir, og at høyden til motorsykkel med fører er mye mindre enn radien i sylinderen.



a) Hvilke fysiske størrelser tenker du at θ avhenger av? Siden vinkler er dimensjonsløse må θ avhenge av dimensjonsløse kombinasjoner av andre størrelser. Bruk dimensjonsanalyse til å bestemme hvilken dimensjonsløs kombinasjon θ er en funksjon av.

b) Hva er vinkelen θ?

c) Hvorfor antok vi at høyden til motorsykkel med fører er mye mindre enn radien i sylinderen? Hva endres dersom vi ikke gjør denne antagelsen?

Løsning:

a) De relevante størrelsene er g, R og v med enheter $[g] = \text{m/s}^2$, $[R] = \text{m}$ og $[v] = \text{m/s}$. Den dimensjonsløse kombinasjonen er

$$\frac{gR}{v^2}.$$

b) Det virker tre krefter: Tyngden $G = mg$, normalkrafta fra veggen som gir en sentripetalakselerasjon, $N = mv^2/R$, og friksjonskrafta F oppover parallelt med veggen. Summen av vertikalkreftene må være null, og dermed er $F = G = mg$. For å finne vinkelen θ mellom normalen til veggen (i forhold til horisontalen) og motorsykkelen må vi se på kraftmomentene om tyngdepunktet. Vi kaller avstanden fra bakken til tyngdepunktet når sykkelen står vertikalt for L. Da er kraftmomentet til normalkrafta $\tau_N = NL\sin\theta$ og til friksjonen $\tau_F = FL\cos\theta$. Tyngden virker i tyngdepunktet, og har derfor ikke noe kraftmoment. For at sykkelen ikke skal velte noen vei må de to kraftmomentene være like:

$$\begin{aligned} NL\sin\theta &= FL\cos\theta \\ m\frac{v^2}{R}\sin\theta &= mg\cos\theta \\ \tan\theta = \frac{gR}{v^2} &\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{gR}{v^2}\right). \end{aligned}$$

c) Vi antok at alle deler av sykkelen har samme avstand fra aksen til sylinderen da vi beregnet sentripetalakselerasjonen. Hvis høyden av sykkel og fører ikke er liten i forhold til radien er ikke dette sant lengre, og vi må ta hensyn til dette i beregninga.

Fasit til gruppeoppgaver

G 11.1

a) Tyngdekraft $G = 9.8$ N i retning nedover, $\tau_G = 4.9$ Nm i retning "inn i arket". Normalkraft $N = 2.5$ N oppover.

b) $\omega = 5.4$rad/s "inn i arket".

G 11.2

a) $I_{tot} = 0.045\text{kg m}^2$.

b) $a = 2.5\text{m/s}^2$.

c) $a = 5.6\text{m/s}^2$.

G 11.3

b) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{gR}{v^2}\right)$.