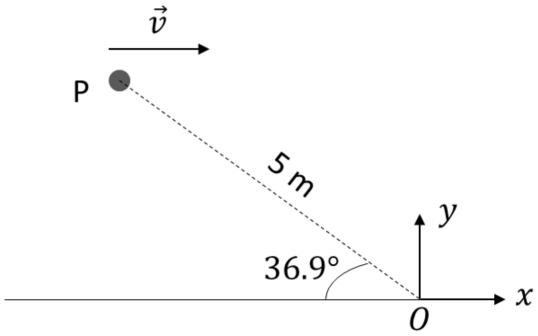
# Oppgavesett uke 12

# "Test deg selv"-oppgaver

Disse oppgavene er fine å gjøre hjemme før du kommer på gruppetimen. Om du har spørsmål til disse oppgavene, ta dem gjerne opp på ekstrahjelpgruppa.

### TDS 12.1 En stein i farta

En liten stein med masse $m = 1.0$ kg beveger seg i horisontal retning med hastighet $\vec{v}$ med størrelse $v = 10$ m/s i det den er i punkt P i figuren.




a) Hva er spinnet (størrelse og retning) som steinen har i forhold til origo $O$ i dette øyeblikket?

**Løsning:** Steinen befinner seg i posisjon

$$\vec{r} = -5.0\text{m}\cos(36.9^\circ)\hat{\mathbf{i}} + 5.0\text{m}\sin(36.9^\circ)\hat{\mathbf{j}} = -4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}},$$

og hastigheten er $\vec{v} = 10\text{m/s}\hat{\mathbf{i}}$. Vi finner spinnet:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = (-4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}}) \times 10\text{kg m/s}\hat{\mathbf{i}} = -30\text{kg m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}.$$

b) Vi antar at tyngdekraften er den eneste kraften som påvirker steinen. Hva er endringsraten til spinnet (størrelse og retning) i dette øyeblikket?

**Løsning:** Ifølge spinnsatsen er endringsraten til spinnet lik netto kraftmoment som påvirker legemet:

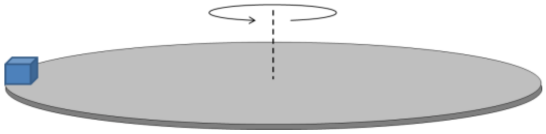
$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{l}}{dt}.$$

Den eneste kraften som påvirker steinen er tyngdekraften, som gi et kraftmoment om origo:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}_G = \vec{r} \times \vec{G} = (-4.0\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\text{m}\hat{\mathbf{j}}) \times (-1.0\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2\hat{\mathbf{j}}) = 39\text{Nm}\hat{\mathbf{k}}.$$

### TDS 12.2 En eske på en roterende skive

En eske med masse $m = 75.0$ kg står på kanten av en homogen, sylindrisk skive med masse $M = 150$ kg og radius $R = 2.00$ m som roterer med vinkelfart $\omega = 0.500$ omdreininger per sekund om en akse ($z$-aksen) gjennom sitt massesenter som vist i figuren. Regn ut størrelsen på spinnet til systemet som består av skiven og esken. Du kan anta at esken er veldig liten i forhold til skiven, slik at du kan behandle esken som et massepunkt. Treghetsmomentet til en sylindrisk skive som roterer om en akse gjennom massesenteret er gitt ved $I_{\text{skive}} = \frac{1}{2}MR^2$.



**Løsning:** Vi beregner treghetsmomentet til hele systemet ved å bruke superposisjonsprinsippet og parallellakseteoremet:

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{skive}} + I_{\text{eske}} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 600 \text{ kgm}^2.$$

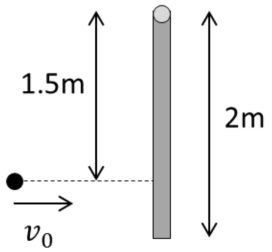
Vinkelfarten er

$$\omega = 0.500 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} = \pi \text{ s}^{-1},$$

og størrelsen på spinnet blir da:

$$L = I_{\text{tot}}\omega = 600 \text{ kgm}^2\pi \text{ s}^{-1} = 1.88 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}.$$

### TDS 12.3 En ball kolliderer med en stav



En tynn, homogen stav med masse $M = 10$ kg og lengde $L = 2.0$ m henger fra taket i et friksjonsfritt hengsel. En ball med masse $m = 3.0$ kg treffer horisontalt på staven med fart $v_0 = 10$ m/s. Etter kollisjonen spretter ballen tilbake og beveger seg med en fart $v_1 = 6.0$ m/s i motsatt retning og staven svinger oppover. Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om et endepunkt er $I = \frac{1}{3}ML^2$. Vi ser bort fra luftmotstand. Finn vinkelfarten til staven rett etter kollisjonen.

**Løsning:** Ytre krefter som virker på staven er gravitasjonskraften og normalkraften fra hengselet på staven. Gravitasjonskraften gir ingen kraftmoment om hengslet siden kraften og kraftarmen er parallelle. Normalkraften fra hengslet gir ikke noe kraftmoment siden den angriper i rotasjonspunktet. Siden det virker ingen ytre kraftmoment under kollisjonen er spinnet bevart: $L_0 = L_1$. Spinnet til ballen om hengselet før kollisjonen er $L_0 = rmv_0$, hvor $r$ er avstanden fra hengselet. Staven har ikke noe spinn før kollisjonen. Etter kollisjonen har staven spinnet $I\omega$ og ballen har spinnet $rmv_1$, totalspinnet er $L_1 = I\omega + rmv_1$ hvor $v_1$ nå er i motsatt retning i forhold til $v_0$. Spinnbevaring gir:

$$rmv_0 = I\omega + rmv_1 \Rightarrow \omega = \frac{mr(v_0 - v_1)}{I} = \frac{3mr(v_0 - v_1)}{ML^2} = 5.4\text{rad/s}$$

# Fasit til "Test deg selv"-oppgaver

### TDS 12.1

a) $\vec{l} = -30\text{kg m}^2/\text{s}\hat{\mathbf{k}}$.

b) $\frac{d\vec{l}}{dt} = 39\text{Nm}\hat{\mathbf{k}}$.

### TDS 12.2

$L = 1.88 \cdot 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$.

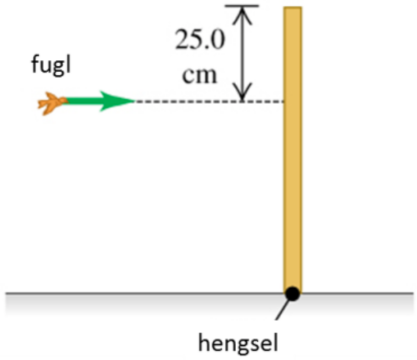
### TDS 12.3

$\omega = 5.4$ rad/s.

# Gruppeoppgaver

## G 12.1 En fugl og en stang

En fugl med masse $m = 0.500$ kg flyr horisontalt med en fart $v = 2.25$ m/s. Fuglen er uoppmerksom og krasjer i en stang som står i veien. Stangen har masse $M = 1.50$ kg og lengde $L = 0.750$ m, og fuglen treffer stangen 25.0 cm under toppen (se figur). Stangen er festet i et friksjonsfritt hengsel på bakken. Treghetsmomentet til en tynn stang som roterer om en akse gjennom sitt massesenter er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Fuglen faller bevisstløs til bakken (men er ellers uskadet og lever et lykkelig liv etterpå). Vi ser bort fra luftmotstand.




a) Hva er vinkelfarten til stangen rett etter at fuglen krasjet i den?

**Løsning:** I kollisjonen mellom fuglen og stangen oppstår ingen ytre kraftmomenter og spinn er bevart. Spinnet til fuglen om hengslet før kollisjonen:

$$L_{\text{før}} = mv(L - 0.250\text{m}) = 0.5625\text{kgm}^2/\text{s}.$$

Etter kollisjonen faller fuglen ned. Etter kollisjonen er spinnet til fuglen om hengslet null fordi posisjonsvektor og bevegelsesmengde er parallelle. Etter kollisjonen er det derfor bare stangen som har spinn:

$$L_{\text{etter}} = I_{\text{hengsel}}\omega_1.$$

For å finne vinkelfarten må vi beregne treghetsmomentet til stangen om hengselet. Vi bruker parallellakseteoremet:

$$I_{\text{hengsel}} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 = 0.28125\text{kgm}^2.$$

Dermed blir vinkelfarten (siden $L_{\text{før}} = L_{\text{etter}}$):

$$\omega_1 = \frac{L_{\text{før}}}{I_{\text{hengsel}}} = 2.00\text{rad/s}.$$

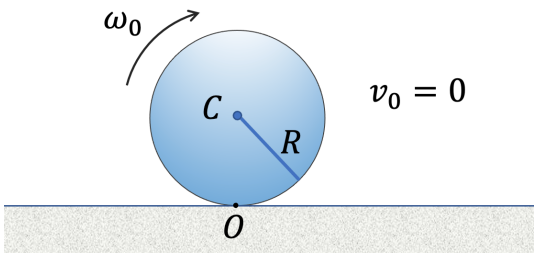
b) Hva er vinkelfarten til stangen når den kommer til en horisontal posisjon?

**Løsning:** Vi ser bort fra luftmotstand. Gravitasjon er en konservativ kraft og vi kan bruke bevaring av mekanisk energi:

$$\frac{1}{2}MgL+\frac{1}{2}I_{\text{hengsel}}\omega_1^2 = 0+\frac{1}{2}I_{\text{hengsel}}\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{MgL}{I_{\text{hengsel}}}+\omega_1^2} = 6.58\text{rad/s}.$$

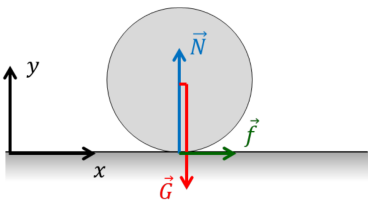
## G 12.2 Ei roterende kule [Veldig lik tidligere eksamensoppgave i FYS111]

Ei homogen kule med masse $M$ og radius $R$ roterer om sitt massesenter $C$ med vinkelfart $\omega_0$. Kulas treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret er $I_C = \frac{2}{5}MR^2$. Den roterende kula settes forsiktig ned på et horisontalt underlag, se figur, hvor det første berøringspunktet kalles $O$. Massesenterets starthastighet er lik null. Til å begynne med både ruller og glir kula mot høyre, men etter en tid gjør friksjonen at kula får en rent rullende bevegelse. Vi ser bort fra luftmotstand.




a) Tegn et frilegemediagram for kula i det den kommer i kontakt med underlaget i punktet $O$. Husk å navngi alle krefter.

**Løsning:**




Gravitasjon $\vec{G}$, normalkraft $\vec{N}$, dynamisk friksjonskraft $\vec{f}$ i positiv $x$-retning (det er denne kraften som akselererer massesenteret fra $v_0 = 0$ m/s til en fart $v_0$).

b) Hva er kulas spinn $L_O$ om punktet $O$ umiddelbart før den berører underlaget?

**Løsning:** Rett før kula kommer i kontakt med underlaget har massesenteret ikke noe hastighet i forhold til kontaktpunktet, så lineærspinnet er null. Men kula roterer om sitt massesenter, så totalspinnet blir

$$L_O = I_C \omega_0 = \frac{2}{5} M R^2 \omega_0.$$

c) Bruk spinnsatsen om kontaktpunktet $O$ til å vise at kulas vinkelfart når kula har gått over i en ren rullebevegelse er

$$\omega = \frac{2}{7} \omega_0.$$

**Løsning:** Vi må se om det er noen av kreftene som gir et kraftmoment om kontaktpunktet $O$. Normalkraften har parallell kraftarm med kraften, og gravitasjonen har antiparallell kraftarm med kraften, så de gir ikke noe kraftmoment om $O$. Friksjonen angriper i kontaktpunktet, og har da kraftarm med null lengde, og dermed heller ikke noe kraftmoment. Spinn er derfor bevart:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}.$$

Spinnet rett før kontakt med overflaten fant vi i forrige oppgave. Spinnet om kontaktpunktet når kula ruller uten å skli (dvs. vi har $v = \omega R$), er gitt ved:

$$\vec{L} = R\hat{\mathbf{j}} \times Mv\hat{\mathbf{i}} - I_C \omega \hat{\mathbf{k}}.$$

Ved å bruke rullebetingelsen får vi (ser på størrelsen til spinnet, i negativ $z$-retning):

$$L = RM \cdot \omega R + \frac{2}{5} M R^2 \omega = \frac{7}{5} M R^2 \omega.$$

Vi setter dette lik spinnet før kontakt og får:

$$\frac{2}{5} M R^2 \omega_0 = \frac{7}{5} M R^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{2}{7} \omega_0.$$

d) Finn avstanden $d$ som kulas massesenter har beveget seg før kula har gått over i en ren rullebevegelse. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er $\mu_d$.

**Løsning:** Den eneste kraften som virker i bevegelsesretning (i positiv $x$-retning) er den dynamiske friksjonskraften, som er konstant og størrelsen er gitt ved $f = \mu_d N$. Fra Newtons 2. lov i $y$-retning får vi at $N = Mg$, og dermed $f = \mu_d Mg$. Med konstant kraft får vi konstant akselerasjon, og vi kan derfor bruke bevegelsesligningen for konstant akselerasjon:

$$v^2 - v_0^2 = 2ad.$$

Med $v_0 = 0$ og $v = \omega R$ (når kula oppfyller rullebetingelsen) får vi:

$$v^2 = 2\mu_d g d \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu_d g} = \frac{\omega^2 R^2}{2\mu_d g} = \frac{2\omega_0^2 R^2}{49\mu_d g}.$$

e) Hva er forandringen i den kinetiske energien til kula over denne avstanden $d$? Forklar kort hvorfor dette ikke er det samme som produktet av friksjonskraften og veilengden $d$.

**Løsning:** I starten har kula ikke noe lineærhastighet, så kinetisk energi før er

$$K_0 = \frac{1}{2} I_C \omega_0^2.$$

Etter at kula har oppnådd rullebetingelsen, har kula både rotasjons- or translatorisk kinetisk energi:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \left(\frac{2}{7}\omega_0\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{2}{7}\omega_0\right)^2 R^2 = \frac{4}{70}\omega_0^2 M R^2.$$

Vi regner ut forskjellen og finner:

$$K_1 - K_0 = \frac{4}{70}\omega_0^2 M R^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \omega_0^2 = \left(\frac{4}{70} - \frac{1}{5}\right) M R^2 \omega_0^2 = -\frac{1}{7} M R^2 \omega_0^2,$$

altså tap av kinetisk energi, som forventet siden dynamisk friksjon er en ikke-konservativ kraft. Dette er *ikke* det samme som produktet av friksjonskraften og veilengden $d$, fordi kula både ruller og sklir over avstanden $d$. Så for å få riktig svar må man regne ut avstanden som kula ruller, og trekke dette fra avstanden $d$, og så ta denne (kortere) avstanden og gange med friksjonskraften for å få samme svar som over.

# Fasit til gruppeoppgaver

### G 12.1

a) $\omega_1 = 2.00$ rad/s.

b) $\omega_2 = 6.58$ rad/s.