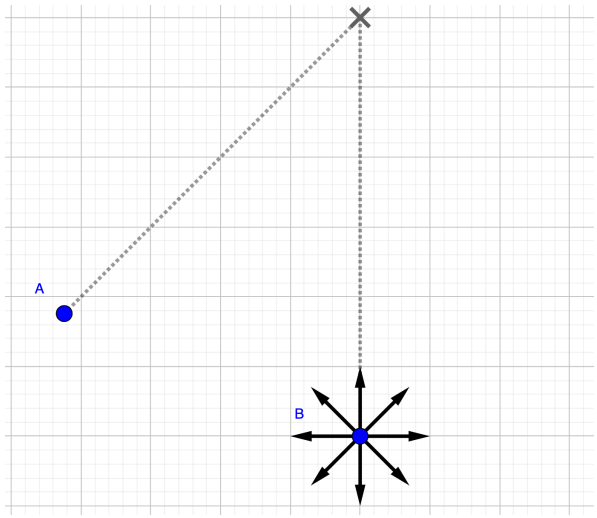
# Seminaroppgaver 4

## S 4.1 Pendel

Figuren viser en pendel ved to punkter i banen: Punkt A som det slippes fra, og bunnpunktet B. Pendelen er festet i taket.




a) Hvilken av pilene viser retningen til hastigheten i punktet B?

b) Hvilken av pilene viser retningen til akselerasjonen i punktet B?

c) Diskutér om noen av pilene kan vise retningen til kreftene som er involvert i bevegelsen. Vil de relevante pilene da ha riktig lengde i forhold til hverandre?

d) Hvordan er hastighet- og akselerasjonsretningen i punkt A?

**Løsning:**

a) Pendelen beveger seg mot høyre på figuren, og hastighetsvektoren må være tangentiell til bevegelsen i en sirkelbane. Pilen som peker rett mot høyre må altså angi hastighetsretningeni punkt B.

b) Akselerasjonen i en sirkelbane har alltid en komponent inn mot sentrum, så for pendelen vil det bety langs snora. Tangensielt er $a = 0$ i punkt B fordi farta $v$ har maksimal verdi der, og dermed null derivert. Pilen som peker rett oppover på figuren må derfor angi akselerasjonsretningen i punkt B.

c) Pilen som peker rett nedover viser retningen til tyngdekraften. Pilen som angir akselerasjonsretningen vil også vise retningen til snorkraften. Snorkraften må være lenger enn tyngdekraften for at akselerasjonen skal peke innover i sirkelbevegelsen, slik at lengden på pilene ikke har riktig lengde i forhold til hverandre på figuren. Pilen som peker rett mot venstre vil vise retningen til eventuell luftmotstand, men det er ikke forventet at studentene skal nevne dette før uken etter.

d) I punkt A står pendelen stille og hastighetsvektoren er nullvektoren. Akselerasjonsvektoren peker i retningen som kula begynner å bevege seg, altså skrått nedover mot høyre.

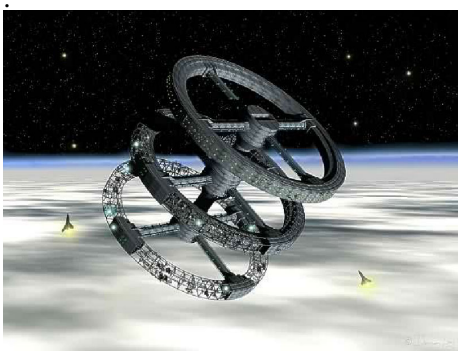
## S 4.2 Kunstig gravitasjon

Det har vært foreslått å lage kunstig gravitasjon på romstasjoner ved å bygge dem som ringer eller sylindre som roterer omkring aksen.

a) Hvorfor føler man seg vektløs i et vanlig romskip?

b) Hva blir "opp" og hva blir "ned" for en passasjer ombord i en slik roterende-sylinder romstasjon?

c) Hvis diameteren er 500 m, hvor fort må den rotere for at 'tyngdekraften' skal bli like stor som på jorda?



**Løsning:**

a) Fordi både romskipet og vi er i fritt fall mot jorda. Tyngdefraften virker på begge, men siden akselerasjonen er lik er det ikke noen normalkraft når vi står på gulvet.

b) Opp blir inn mot sentrum, ned blir bort fra sentrum.

c) Hvis $v$ er farten til en person som står på ytterveggen av sylinderen og $r = 250$ m er radien, må vi ha

$$\frac{v^2}{r} = g \qquad \text{eller} \qquad v = \sqrt{gr} = 49,5 \text{ m/s}$$

Omløpstida blir

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 31,7 \text{ s}$$

## S 4.3 Differensialligninger

Finn løsningen av differensialligningen som oppfyller den gitte betingelsen:

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}, y(0) = 2.$$

**Løsning:** Dette er en separabel diff-ligning, vi flytter alt med $y$ over på venstre side og alt med $x$

på høyre side:

$$y\frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

$$ydy = 3x^2dx.$$

Nå kan vi integrere på begge sider:

$$\int ydy = \int 3x^2dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^3 + C,$$

hvor vi har slått sammen integrasjonskonstantene på begge sider til en konstant $C$. Vi løser nå for $y$ og får:

$$y^2 = 2x^3 + C'$$

hvor $C'$ er en ny konstant ($2C$),

$$y = \pm\sqrt{2x^3 + C'}.$$

Dette er den generelle løsningen av diff-ligningen vi startet ut med. Nå skal vi finne den partikulære løsningen, dvs. løsningen som oppfyller $y(0) = 2$. Vi setter inn:

$$2 = \pm\sqrt{0 + C'}$$

$$2 = \pm\sqrt{C'}.$$

Dette kan kun være oppfylt med den positive roten og vi får at $2 = \sqrt{C'}$, $C' = 4$. Dermed får vi at løsningen er

$$y = \sqrt{2x^3 + 4}.$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+3}, y(0) = 1.$$

**Løsning:** Vi separerer variablene med å gange med $dx$ på begge sider og dele på $y$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+3}.$$

Vi integrerer på begge sider og får:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+3}$$

$$\ln(y) = \ln(x+3) + C.$$

Tar eksponenten på begge sider og får:

$$y = e^{\ln(x+3)+C} = e^C e^{\ln(x+3)} = A(x+3)$$

hvor $A = e^C$. Nå skal vi finne løsningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$:

$$1 = A(0+3) \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Dermed får vi løsningen

$$y = \frac{1}{3}(x+3).$$

## S 4.4 Luftmotstand

Anta at det har blitt mulig å lage et system hvor man kan være utsatt for kun luftmotstand, men ikke tyngdekraft. Kraften $F_D$ som et legeme vil oppleve i dette systemet er gitt ved følgende formel:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \tag{1}$$

hvor $C_D$ er en konstant som beskriver motstanden, $\rho$ er tettheten til lufta, $A$ er tverrsnittarealet som står vinkelrett på bevegelsesretningen og $v$ er legemets hastighet.

En kule slippes løs i dette systemet, med en initialhastighet på $v_0$ ved tiden $t_0$=0. Anta at all bevegelse foregår i x-retning.

a) Hva slags enheter må $C_D$ ha?

**Løsning:** Vi finner enheten ved å skrive om uttrykket til

$$\frac{1}{2} C_D = \frac{F_D}{\rho A v^2}$$

Da finner vi at

$$[C_D] = \frac{\frac{kgm}{s^2}}{\frac{kgm^4}{s^2 m^3}} = 1$$

Vi ser derfor at konstanten $C_D$ er enhetsløs.

b) Hvilken vei må luftmotstandskraften ha i forhold til bevegelsesretningen?

**Løsning:** Luftmotstanden virker mot bevegelsesretningen.

c) Bruk Newtons andre lov til å sette opp en differensiallikning for situasjonen.

**Løsning:** Siden det bare virker én kraft, gir N2L at

$$ma = -F_D \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{F_D}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{1}{2} C_D \rho A v^2}{m}$$

d) Løs denne differensiallikningen for å finne farten $v(t)$ til kula med de gitte initialbetingelsene.

**Løsning:**

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\frac{1}{2}C_D\rho A v^2}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{\frac{1}{2}C_D\rho A}{m}dt$$

Videre redefinerer vi konstanten på høyre side av likhetstegnet som $\kappa = -\frac{1}{2}\frac{C_D\rho A}{m}$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_{t_0}^{t} \kappa dt$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \kappa(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \kappa t$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} - \kappa t} = \frac{2v_0 m}{2m + C_D\rho A v_0 t}$$

e) Diskutér hvor realistisk dette systemet er, og hvordan man eventuelt kunne laget et slikt system.

**Løsning:** For å oppleve luftmotstand men ikke tyngdekraft må vi være i fritt fall. Det kan være i et fly som følger en parabelbane eller i et romskip.