Seminaroppgaver 7

S 7.1 En motorsykkel som akselererer

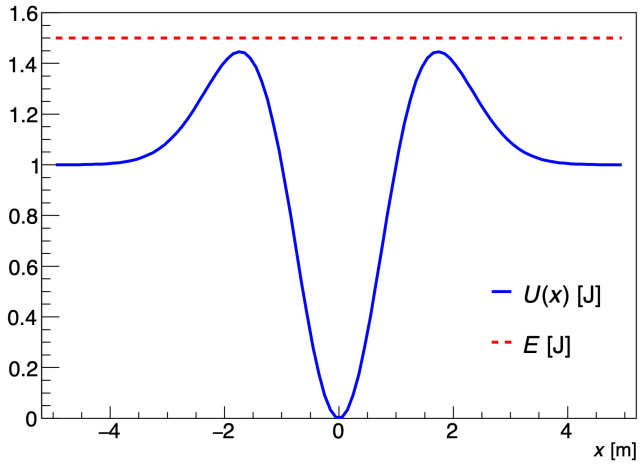
Motoren til en motorsykkel produserer en konstant effekt P. Motorsykkelen med motorsyklisten har total masse m. Motorsykkelen starter i ro ($v_0 = 0.0$ m/s) i posisjon $x_0 = 0.0$ m ved tiden $t = 0.0$ s, og kjører så bortover på en rett og flat vei. Vi ser bort fra luftmotstand. Friksjonen på hjulene er hele tiden statisk og gjør ikke noe arbeid (dette skal vi se på seinere i kurset).

a) Finn et uttrykk for farten $v(t)$ til motorsykkelen som funksjon av tid t.

b) Finn så uttrykket for akselerasjonen $a(t)$ til motorsykkelen.

c) Finn tilslutt et uttrykk for posisjonen $x(t)$ til motorsykkelen.

S 7.2 Energidiagram



En partikkel befinner seg i et potensial $U(x)$ som vist i figuren, og har total mekanisk energi E som angitt ved den stiplede linja.

a) Finn likevektspunktene og karakteriser dem som ustabile eller stabile. Hva er størrelsen på den tilhørende kraften i disse punktene?

b) Ved hvilke(n) posisjon(er) er den kinetiske energien til partikkelen størst og minst?

S 7.3 Annenordens differensialligninger

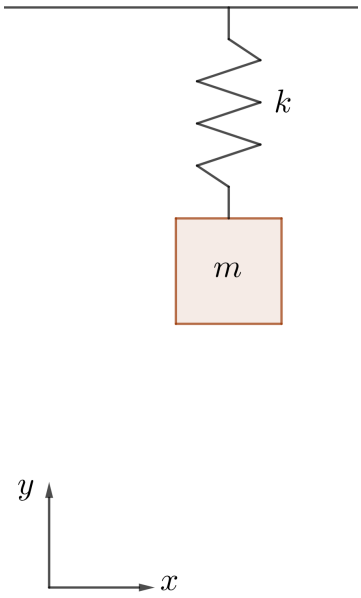
Finn den generelle løsningen til de følgende annenordens, homogene differensialligningene med konstante koeffisienter:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

S 7.4 En kloss henger i en fjær [Svært lik en tidligere eksamensoppgave]



En kloss med masse m er festet til en masseløs fjær med fjærkonstant k i taket. Vi velger positiv y-retning oppover (se figur). Fjæren har en likevektslengde (naturlig lengde) y_0 og følger Hookes lov, slik at fjærkraften er gitt ved $F(y) = -k(y - y_0)$ (kontrollér for deg selv at fortegnet på fjærkraften er riktig). Vi ser bort fra luftmotstand. I starten henger klossen i ro.

a) Tegn et frilegemediagram for klossen.

b) Finn likevektshøyden y_1 til klossen (dvs. høyden der systemet er i ro, og fjæren er litt strukket på grunn av tyngdekraften).

c) Tolk resultatet. Hvordan påvirker de ulike konstantene som karakteriserer systemet likevektshøyden?

d) Nå drar vi klossen rett ned slik at fjæren blir enda mer strukket ut, og så slipper vi klossen. Sett opp differensialligningen som beskriver bevegelsen til klossen.

e) Definer en ny variabel $z = y - y_1$ som er forflytningen fra likevektshøyden til systemet. Vis at differensialligningen som z må tilfredsstille er gitt ved

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z.$$

f) Løs differensialligningen i deloppgaven over analytisk for å finne posisjonsfunksjonen $z(t)$ til klossen. Bruk initialbetingelsene $z(t=0) = z_0$ hvor z_0 er maks amplitude, og $v(t=0) = 0.0$ m/s, dvs. klossen er momentant i ro akkurat i det den slippes, for å finne den spesielle (partikulære) løsningen.