Seminaroppgaver 7

S 7.1 En motorsykkel som akselererer

Motoren til en motorsykkel produserer en konstant effekt P. Motorsykkelen med motorsyklisten har total masse m. Motorsykkelen starter i ro ($v_0 = 0.0$ m/s) i posisjon $x_0 = 0.0$ m ved tiden $t = 0.0$ s, og kjører så bortover på en rett og flat vei. Vi ser bort fra luftmotstand. Friksjonen på hjulene er hele tiden statisk og gjør ikke noe arbeid (dette skal vi se på seinere i kurset).

a) Finn et uttrykk for farten $v(t)$ til motorsykkelen som funksjon av tid t.

Løsning: Effekt er gitt ved $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, og her er P konstant, slik at arbeidet er gitt ved $W = \int_0^t P dt' = Pt = \frac{1}{2}mv^2$. Vi løser mhp. v og får:

$$v(t) = \sqrt{2Pt/m}.$$

b) Finn så uttrykket for akselerasjonen $a(t)$ til motorsykkelen.

Løsning: Ved å derivere hastigheten mhp. tid får vi akselerasjonen:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{2P/m}t^{1/2}\right] = \sqrt{2P/m}\frac{1}{2}t^{-1/2}$$

Dermed får vi: $a(t) = \sqrt{P/2mt}$.

c) Finn tilslutt et uttrykk for posisjonen $x(t)$ til motorsykkelen.

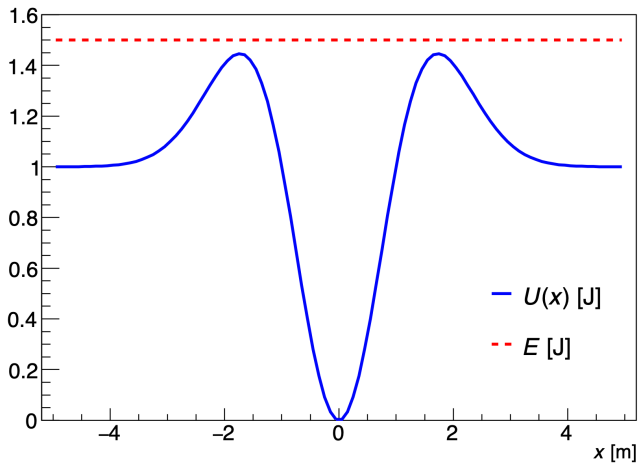
Løsning: Nå integrerer vi hastigheten fra $t = 0.0$ sekunder til en tid t for å finne posisjonen:

$$v(t) = \sqrt{2Pt/m} = \frac{dx}{dt}$$

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{2Pt'/m}dt' = \sqrt{2P/m}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]$$

og vi har da posisjonen $x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{2Pt^3/m}$.

S 7.2 Energidiagram



En partikkel befinner seg i et potensial $U(x)$ som vist i figuren, og har total mekanisk energi E som angitt ved den stiplede linja.

a) Finn likevektspunktene og karakteriser dem som ustabile eller stabile. Hva er størrelsen på den tilhørende kraften i disse punktene?

Løsning: Vi har likevektspunkter der den deriverte av potensialfunksjonen er null, dvs.

$$\frac{dU}{dx} = -F(x) = 0.$$

Dette har vi i toppunktene ved $x \approx -1.7$ og 1.7 m, og ved bunnpunktet ved $x = 0.0$ m. Toppunktene er ustabile siden en liten puff gjør at partikkelen ville fjerne seg langt vekk fra disse posisjonene, mens bunnpunktet er et stabilt likevektspunkt.

b) Ved hvilke(n) posisjon(er) er den kinetiske energien til partikkelen størst og minst?

Løsning: Fra bevaring av mekanisk energi: $E = U(x) + K(x) =$ konstant, har vi at den kinetiske energien er størst der den potensielle energien er minst, det er ved $x = 0.0$ m. Tilsvarende er den kinetiske energien minst der den potensielle energien er størst, dvs. ved $x \approx -1.7$ og 1.7 m.

S 7.3 Annenordens differensialligninger

Finn den generelle løsningen til de følgende annenordens, homogene differensialligningene med konstante koeffisienter:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$

Løsning: Her er den karakteristiske ligningen gitt ved

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Vi bruker ABC-formelen for en 2.gradsligning (Rottmann side 11):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

med løsninger (for $a \neq 0$):

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

I vårt tilfelle er $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$ og vi får:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Det vil si at vi har to reelle røtter: $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -2$. Da får vi den generelle løsningen:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

Løsning: Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

og har $\lambda_1 = 2$ som eneste løsning. Da får vi at den generelle løsningen er gitt ved

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}.$$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

Løsning: Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

som har to komplekse røtter som løsning:

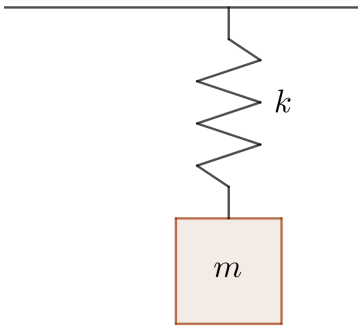
$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3},$$

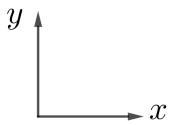
$$\lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Da har vi den generelle løsningen gitt ved:

$$x(t) = e^{-t}\left[C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t)\right].$$

S 7.4 En kloss henger i en fjær [Svært lik en tidligere eksamensoppgave]

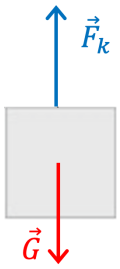




En kloss med masse m er festet til en masseløs fjær med fjærkonstant k i taket. Vi velger positiv y-retning oppover (se figur). Fjæren har en likevektslengde (naturlig lengde) y_0 og følger Hookes lov, slik at fjærkraften er gitt ved $F(y) = -k(y - y_0)$ (kontrollér for deg selv at fortegnet på fjærkraften er riktig). Vi ser bort fra luftmotstand. I starten henger klossen i ro.

a) Tegn et frilegemediagram for klossen.

Løsning: Vi har gravitasjonskraft $\vec{G} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ som virker nedover og fjærkraft $\vec{F}(y) = -k(y - y_0)\hat{\mathbf{j}}$ som virker oppover. Bemerkning: fjæren er strukket slik at $y < y_0$. Det betyr at $y - y_0 < 0$, og dermed er $-k(y - y_0) > 0$ og fjærkraften virker i positiv y-retning.



b) Finn likevektshøyden y_1 til klossen (dvs. høyden der systemet er i ro, og fjæren er litt strukket på grunn av tyngdekraften).

Løsning: Likevektshøyden er karakterisert ved at klossen henger i ro dersom den slippes nettopp denne høyden med null fart. Det vil si at summen av alle krefter er lik null. Fra dette får vi da at

$$0 = -k(y_1 - y_0) - mg$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Dermed er likevektshøyden

$$y_1 = y_0 - \frac{mg}{k}.$$

c) Tolk resultatet. Hvordan påvirker de ulike konstantene som karakteriserer systemet likevektshøyden?

Løsning: Vi ser at dersom massen til klossen er større, så vil det negative bidraget fra leddet $\frac{mg}{k}$ bli større og likevektshøyden vil være nærmere bakken. Dersom fjærkonstanten dominerer, så vil det negative bidraget bli mindre og likevektspunktet vil være nærmere fjærens likevektspunkt.

d) Nå drar vi klossen rett ned slik at fjæren blir enda mer strukket ut, og så slipper vi klossen. Sett opp differensialligningen som beskriver bevegelsen til klossen.

Løsning: Vi ser at kreftene kun virker i y-retning. Vi har da kraften fra fjæren som prøver å komme tilbake til likevektspunktet, samt gravitasjonskraften. N2L gir da

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_y = F + G$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y - y_0) - mg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0) - g \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}(y - y_0) + g = 0$$

e) Definer en ny variabel $z = y - y_1$ som er forflytningen fra likevektshøyden til systemet. Vis at differensialligningen som z må tilfredsstille er gitt ved

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z.$$

Løsning: Vi bruker det vi fant i b)-oppgaven: $y_1 = y_0 - \frac{mg}{k}$. Det gir oss $z = y - y_1 = y - y_0 + \frac{mg}{k}$. Vi ser så på differensialligningen vi fant tidligere og får:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0) - g = -\frac{k}{m}(y - y_0 + \frac{mg}{k})$$

hvor vi har ganget $-g$ med brøken $\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{k}$ og puttet alt inni parentesen. Da gjenkjenner vi det inni parentesen som vår nye variabel $z = y - y_1$, og vi får

$$-\frac{k}{m}(y - y_0 + \frac{mg}{k}) = -\frac{k}{m}(y - y_1) = -\frac{k}{m}z = \frac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0.$$

f) Løs differensialligningen i deloppgaven over analytisk for å finne posisjonsfunksjonen $z(t)$ til klossen. Bruk initialbetingelsene $z(t = 0) = z_0$ hvor z_0 er maks amplitude, og $v(t = 0) = 0.0$ m/s, dvs. klossen er momentant i ro akkurat i det den slippes, for å finne den spesielle (partikulære) løsningen.

Løsning: Vi løser denne differensialligningen på vanlig vis, den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_e$$

hvor vi har definert den naturlige frekvensen $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dette gir to komplekse røtter:

$$\lambda_1 = +i\omega_e,$$

$$\lambda_2 = -i\omega_e,$$

og vi får da den generelle løsningen

$$z(t) = C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sin(\omega_e t).$$

Nå bruker vi initialbetingelsene for å finne den spesielle løsningen:

$$z(t = 0) = C_1 = z_0,$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = C_2\omega_e = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

siden vi vet at $\omega_e \neq 0$. Da får vi tilslutt:

$$z(t) = z_0\cos(\omega_e t) = z_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$