Maxwell's ligninger og elektromagnetiske bølger

I forelesningene og i læreboken er Coulombs lov for the elektriske felt $\mathbf{E}$ formulert på følgende form:

$$\oint_{\partial v} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = Q/\varepsilon_0 \tag{1}$$

Integralet til venstre går over overflaten til et volum v og angir den elektriske fluksen gjennom flaten. Flate-differensialet d$\mathbf{a}$ er en vektor som står normalt på dette differensielle flate-elementet. Den lukkede overflaten betegner vi med det litt abstrakte symbolet ∂v som betyr "randen til volumet v". På høyre side inngår Q som er den totale ladningen innenfor flaten, i.e. i volumet v. Hvis denne ladningen kan tilskrives en ladningstetthet ρ, vil vi derfor kunne skrive

$$Q = \int_v \mathrm{d}v\rho \tag{2}$$

hvor dv er det differensielle volum-elementet.

Det magnetiske feltet $\mathbf{B}$ oppfyller en tilsvarende lov. Da det ikke finnes magnetiske ladninger, kan vi skrive denne loven som (1), men med null på høyre side:

$$\oint_{\partial v} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

Den magnetiske fluks gjennom enhver lukket flate er derfor lik null. Magnetiske feltlinjer er alltid lukkede kurver som ikke kan begynne eller ende på magnetiske ladninger.

Gradient av skalar-felt

Ligningene (1) og (3) inneholder de to første Maxwell-ligningene på integralform. Vi kan nå skrive dem på en tilsvarende differensiell form ved innføre vektor-operatoren nabla

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{4}$$

som noen også liker å kalle "del". Her er $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ og $\mathbf{e}_z$ ortogonale enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning. Hvis den nå virker på en funksjon $f = f(x, y, z)$, så får vi vektoren

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{5}$$

Dette kalles for "gradienten til funksjonen f" og sier noe om hvordan funksjonen forandrer seg i forskjellige retninger.

En direkte bruk av denne operatoren er beregning av det elektriske feltet i et gitt elektrisk potensial $V = V(x, y, z)$. Da har vi at

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V \tag{6}$$

Dette følger direkte fra definisjonen av potensialforskjellen $V_{ba} = V_b - V_a$ mellom to punkt a og b i et elektrisk felt $\mathbf{E}$, nemlig

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}$$

hvor det differensielle linje-element

$$\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}x\, \mathbf{e}_x + \mathrm{d}y\, \mathbf{e}_y + \mathrm{d}z\, \mathbf{e}_z \tag{7}$$

I integralet er nå $\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = -\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nabla} V = -(\partial V/\partial x)\mathrm{d}x - (\partial V/\partial y)\mathrm{d}y - (\partial V/\partial z)\mathrm{d}z$ ved vanlig, skalar vektor-multiplikasjon. Men dette er ikke noe annet enn det negative differensialet $\mathrm{d}V$ av potensialet slik at

$$V_{ba} = \int_a^b \mathrm{d}V = V_b - V_a$$

som forventet.

Som et eksempel fra elektrostatikken så er potensialet fra en punktladning Q gitt ved $V = Q/4\pi\varepsilon_0 r$. Det tilsvarende elektriske feltet vet vi er radielt med størrelse $E_r = -\partial V/\partial r$. Dette gir $E_r = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ som vi kan også skrive som

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \tag{8}$$

hvor $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ er en enhetsvektor i radiell retning. Dette kan nå også beregnes fra (6). Vi skriver $V = (Q/4\pi\varepsilon_0)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ slik at

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}2x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

og tilsvarende for de to andre deriverte. Fra definisjonen (5) for gradienten blir altså nå

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \tag{9}$$

Men vektoren i parentesen er akkurat $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ og vi har samme svar (8) som vi fant ovenfor.

Divergens av vektor-felt

Mens et skalart felt kan visualiseres ved kote-linjer som angir hvor feltet har en konstant verdi, kan et vektor-felt $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y,z)$ illustreres ved tegne inn felt-linjer som angir størrelse og retning av feltet i hvert punkt. Man fr dermed et slags strømningsbilde selv om det vanligvis ikke er noe som flyter eller strømmer. Tilsvarende gradienten for et skalart felt, kan vi nå definere divergensen til et vektor-felt ved

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{10}$$

Dette kan formelt betraktes som det skalare produkt mellom vektor-operatoren $\boldsymbol{\nabla}$ og vektor-feltet $\mathbf{E}$. Divergensen inneholder inneholder informasjon om hvordan strømningsbildet ser ut på småskalaer.

Som et eksempel, la oss beregne divergensen av det elektriske feltet (9) utenfor en punkt-ladning. Vi finner da

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0$$

og vi sier at feltet er divergens-fritt for $r > 0$.

Nå kan dette elektriske feltet uttrykkes som gradienten av det skalare potensialet som i (6). Komponentene av denne gradient-vektoren er

$(\boldsymbol{\nabla} V)_x = \partial V/\partial x, (\boldsymbol{\nabla} V)_y = \partial V/\partial y, (\boldsymbol{\nabla} V)_z = \partial V/\partial z$ som følger fra definisjonen (5). Tar vi nå divergensen av denne vektoren, får vi

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{11}$$

Denne kombinasjonen av andre-deriverte, kalles vanligvis for Laplace-operatoren $\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Vi vil møte den igjen senere i forbindelse med bølgeligningen.

Gauss' integral-teorem

Vi er nå klar til å skrive om de to første Maxwell-ligningene på differensiell form. På den vil de være gyldige lokalt i hvert punkt i tidrommet. Integral-versjonene (1) og (3) sier derimot bare noe om feltene på store skalaer, det vil si at de gir en mer global beskrivelse. Dette kan gjøres ved å benytte integral-teoremet til Gauss som sier at for et vektor-felt $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ vil

$$\oint_{\partial v} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \int_v \mathrm{d}v \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \tag{12}$$

Vi antar at dette er utledet i et annet kurs. Integralet på høyre side går over hele volumet innesluttet av den lukkede flaten ∂v.

I Maxwell-ligningen (1) skriver vi nå høyre-siden som i (2) og flytter den over til venstre. Da får vi

$$\int_v \mathrm{d}v (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \rho/\varepsilon_0) = 0$$

Innholdet i parantesen må derfor være null, og vi må ha

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{13}$$

Dette er Maxwell's første ligning på differensiell form. Den blir ofte kalt for Gauss' lov for det elektriske feltet.

På samme måte får vi fra (3)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{14}$$

Dette er den andre Maxwell-ligning . Denne sier at det magnetiske felt er divergens-fritt da det ikke finnes frie, magnetiske ladninger eller monopoler.

Som et enkelt eksempel, la oss nå betrakte en kule med radius a og uniform ladningstetthet ρ. Det elektriske feltet utenfor kula hvor $r > a$ er igjen gitt ved (8) med $Q = 4\pi a^3\rho/3$. Inne i kula har vi derimot

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

Som en sjekk ser vi at på overflaten av kula hvor $r = a$ er $E = Q/4\pi\varepsilon_0 a^2$ som stemmer. Divergensen av feltet inne i kula blir nå

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(1+1+1) = \rho/\varepsilon_0$$

i overensstemmelse med (13).

Som et annet eksempel kan vi bruke det magnetiske feltet $B = \mu_0 I/2\pi r$ fra en uendelig lang og rett ledning som fører strømmen I. Felt-linjene er sirkler om ledningen som er beskrevet ved vektor-feltet

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) \tag{15}$$

Divergensen av dette feltet kan nå direkte beregnes. Vi finner da

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{2yx}{r^4} - \frac{2xy}{r^4}) = 0$$

som forventet fra den andre Maxwell-ligning (14).

Rotasjon av vektor-felt

Som for hvilke som helst to vektorer, kan også nabla-operatoren $\boldsymbol{\nabla}$ og et vektor-felt $\mathbf{E}$ kombineres på to måter. Det skalare vektor-produktet $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ er divergensen som vi allerede har diskutert litt. Derimot vil vektor-produktet $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ tilsvare en ny, differensiell egenskap ved feltet som mange kaller rotasjon på norsk (eller 'curl' på engelsk). Den er altså gitt som

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{16}$$

Det er en ny vektor som karakteriserer vektor-feltet $\mathbf{E}$ i hvert punkt.

Hvis vektor-feltet er gitt som gradienten av et potensial, for eksempel $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$, finner vi lett at

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} V) = 0 \tag{17}$$

siden to partielle deriverte alltid kommuterer med hverandre. For eksempel, for x-komponenten har vi

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}\right) = 0$$

og tilsvarende for de to andre komponentene.

Et annet, nyttig resultat er at divergensen til en rotasjon alltid er null, i.e.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = 0 \tag{18}$$

Det ser vi ved direkte utregning fra definisjonen av divergensen,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} = 0$$

hvor vi igjen bruker at de partelle deriverte kommuterer med hverandre.

Til slutt skriver vi bare ned den tilsvarende relasjon

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{19}$$

som også kan verifiseres ved direkte utregning. Den tilsvarer den vanlige reduksjonen $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ av det doble vektor-produktet.

Stokes' integral-teorem

De to siste Maxwell-ligningene kommer fra de to lovene vi har formulert for elektrisk og magnetisk induksjon. Den første fant Faraday og skrives på integralform som

$$\oint_{\partial a} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{20}$$

Linje-integralet på venstre side går over randen ∂a til en flate a som gjennomtrenges av den magnetiske fluksen

$$\Phi_B = \int_a \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \tag{21}$$

Den gir et kvantativt uttrykk for det induserte, elektriske felt som skyldes tidsvariasjon i det magnetiske felt. På samme vil magnetiske felt induseres av elektriske strømmer og vil oppfylle

$$\oint_{\partial a} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 (I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}) \tag{22}$$

Her er I den totale, elektriske strøm som går gjennom den lukkede kurven ∂a, mens det siste ledd representerer Maxwell's forskyvningsstrøm. Den er gitt ved den elektriske fluksen

$$\Phi_E = \int_a \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \tag{23}$$

som går gjennom den tilsvarende flaten.

Begge disse to lovene kan nå skrives på differensiell form ved å gjøre bruk av Stokes' integralteorem. Det sier at for et vilkårlig vektor-felt $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ så har man at

$$\oint_{\partial a} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = \int_a \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \tag{24}$$

for en gitt flate a med rand ∂a.

Dette teoremet gjør det nå mulig å skrive venste side av Faraday's lov som et flate-integral. Siden den magnetiske fluksen er gitt ved flate-integralet (21), kan vi skrive ligningen som

$$\int_a d\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) = 0$$

hvor tidsvariasjonen i den magnetiske fluksen skyldes den eksplisitte tidsvariasjon av det elektriske feltet, uttrykt ved den partiell-deriverte. Husk at integrasjonsflaten ligger i ro under hele denne betraktningen. Denne ligningen er nå alltid oppfylt når integranden settes lik null, i.e.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{25}$$

Dette er nå Maxwell's tredje lov.

Den andre magnetiske induksjonsloven (22) kan skrives på en tilsvarende måte når vi skriver den totale strømmen I gjennom flaten uttrykt ved strømtettheten $\mathbf{J}$,

$$I = \int_a d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} \tag{26}$$

Da tar den formen

$$\int_a d\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mu_0 \int_a d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

Igjen må integrandene på begge sidene må være like store, og vi får derfor at

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{27}$$

som er Maxwell's fjerde lov.

Som en illustrasjon av denne nye formuleringen, kan vi betrakte en rett, sylindrisk leder som ligger langs z-aksen og har radius a. Den fører en konstant strømtetthet J i denne retningen. Strømmen som går gjennom en sirkel med radius $r < a$ målt fra sylinderaksen er dermed $I = \pi r^2 J$ slik at det magnetiske feltet inne i lederen er $B = Jr/2\mu_0$. Felt-linjene er konsentriske sirkler og gitt ved

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{2}(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) \tag{28}$$

På lederens overflate $r = a$ stemmer dette med hva vi hadde i (15). Beregninger vi nå rotasjonen av dette vektor-feltet, finner vi at den har bare en komponent i z-retning som er

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_z = \frac{\mu_0 J}{2}(1 + 1) = \mu_0 J$$

Dette stemmer med (27) da det ikke opptrer noen forskyvingsstrøm her.

Maxwell's ligninger

Disse fire fundamentale ligningene kan vi skrive på en litt penere måte ved å innføre det elektriske induksjonsfeltet $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Samtidig skiller vi mellom det fulle magnetiske feltet $\mathbf{B}$ som gir opphav til magnetiske krefter, og feltet $\mathbf{H}$ som induseres av strømmen, i.e. $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Vi kan da samle de fire ligningene på følgende måte:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{30}$$

Det fine med denne skrivemåten er at den også gjelder i generelt medium som ikke nødvendigvis er vakum, noe som vi implisitt har antatt til nå. I de fleste materialer har vi nemlig at $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ og $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ der den elektriske susceptibiliteten $\varepsilon = K_e \varepsilon_0$ og den magnetiske permeabiliteten $\mu = K_m \mu_0$ hvor K_e og K_m kan vanligvis betraktes som materialkonstanter som forklart i forelesningene.

Elektromagnetiske bølger

I vakum et det hverken elektriske ladninger eller strømmer. Maxwell's ligning (27) blir da $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 (\partial \mathbf{E}/\partial t)$. Deriverer denne partielt med hensyn på tiden, får vi

$$\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

På venstre side kan vi her sette inn for $\partial \mathbf{B}/\partial t$ fra (25). Det gir

$$-\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Bruker vi nå identiteten (19) kombinert med $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ fra (13) i vakum, finner vi

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{31}$$

Dette er bølgeligningen for det elektriske feltet. Den tilsvarende ligningen for det magnetiske feltet finner vi på samme måte ved å først tidsderivere (25) og så sette inn $\partial \mathbf{E}/\partial t$ fra (27). Gjør vi så bruk av (19) igjen kombinert med $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, blir resultatet

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{32}$$

I begge disse bølgeligningene ser vi at forplantningshastigheten er

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{33}$$

Setter vi inn de kjente verdiene for konstantene ε_0 og μ_0, gir dette $c = 299\,752\,458$ m/s. Dette er det samme som lyshastigheten i vakum. Med denne oppdagelsen skjønte Maxwell at lysbølger er et rent elektromagnetisk fenomen beskrevet ved hans ligninger.

En plan bølge med frekvens $\omega = 2\pi f$ som forplanter seg langs enhetsvektoren $\mathbf{n}$ og med amplitude $\mathbf{E}_0$, er beskrevet ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \tag{34}$$

hvor bølgetallet $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$. Man ser at dette er en løsning ved direkte innsettelse i (31). Da vi må ha oppfylt at $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$, betyr det at $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 = 0$. På samme måte finner vi for det magnetiske feltet i (32) at $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 = 0$ som nå følger fra $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$. Begge felt-vektorene står derfor normalt på forplantningsretningen $\mathbf{n}$. Bølgebevegelsen sies å være transvers.

Dette ser vi også ved å ta i bruk Maxwell-ligningen (25). Setter vi inn her løsningene (31) og (32), finner vi at $\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{B}_0$. Dette betyr at vi vil ha $\mathbf{n}\times\mathbf{E} = c\mathbf{B}$ for bølgen. De tre vektorene $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ og $\mathbf{n}$ danner derfor hele tiden et høyre-orientert aksekors.

Energitettheten i bølgen følger fra det vanlige uttrykket

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$$

som gir den instantane verdi $u = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ for en plan bølge. Den tilsvarende energistrømmen i bølgen er gitt ved det som kalles Poynting's vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ og skjer med lystes hastighet i retning $\mathbf{n}$.

Elektromagnetiske bølger i media beskrives på nøyaktig samme måte ved de mer generelle Maxwell-ligninger (29) og (30). De resulterende bølgeligningene vil da ble de samme som i vakum, bare med $\varepsilon_0\mu_0$ erstattet med material-verdiene $\varepsilon\mu$. For et ikke-magnetisk materiale er $\mu = \mu_0$ og derfor vil mediumet ha en lyshastighet $v = c/n$ med $n = \sqrt{K_e} > 1$. Dermed blir $v < c$ og n er brytningsindeksen for materialet.

Magnetisk vektor-potensial og gauge-invarians

Vi har tidligere skrevet at det elektriske feltet $\mathbf{E}$ er gitt ved gradienten til det skalare potensialet V som i (6). Men dette kan ikke alltid være helt riktig. Da ville nemlig rotasjonen $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ være null fra (17). Dette er i motstrid med Maxwell's tredje ligning (25). Vi kan rette opp dette lille problemet ved å gjøre bruk av Maxwell's andre ligning (14). Hvis vi her innfører et nytt vektor-potensial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ slik at

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{35}$$

så ser vi at da vil den alltid være automatisk oppfylt ifølge (18). Dette vetor-feltet $\mathbf{A}$ er det magnetiske potensial og spiller en sentral rolle i den kvantemekaniske beskrivelse av elektromagnetiske fenomen.

Dette gjør det nå mulig å skrive Maxwell's tredje ligning (25) som

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

Vektoren i parantesen er derfor en ren gradient og dermed har vi det generelle resultat

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{36}$$

Det siste leddet her representerer den induserte, elektromotoriske kraft fra et tidsvariabelt magnetfelt.

For et gitt magnetfelt $\mathbf{B}$ er ikke det magnetiske vektor-potensialet $\mathbf{A}$ i (35) entydig bestemt. Vi kan nemlig alltid addere til $\mathbf{A}$ en gradient $\boldsymbol{\nabla}\chi$ hvor $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$ er en vilkårlig, skalar funksjon, i.e.

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \tag{37}$$

uten at $\mathbf{B}$ forandres. Dette skyldes igjen (17). Det elektriske feltet $\mathbf{E}$ vil også forbli det samme hvis det skalare potensialet V forandres til

$$V \rightarrow V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{38}$$

At Maxwell-ligningene forblir uforandret under disse to transformasjonene (37) og (38), er en ny type invarians eller symmetri i elektromagnetisk teori og kalles gauge-invarians. Felt-transformasjonene kalles gauge-transformasjoner og er av fundamental betydning i alle moderne teorier for elementærpartiklene som utgjør materien omkring oss.

`Oslo 13/11-2009, Finn Ravndal`