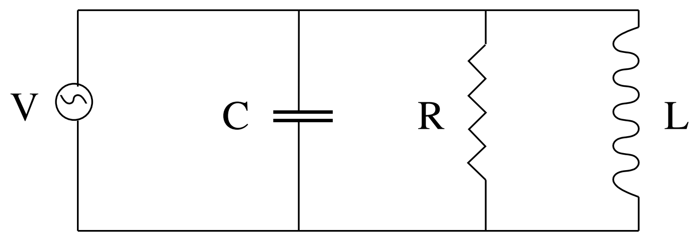
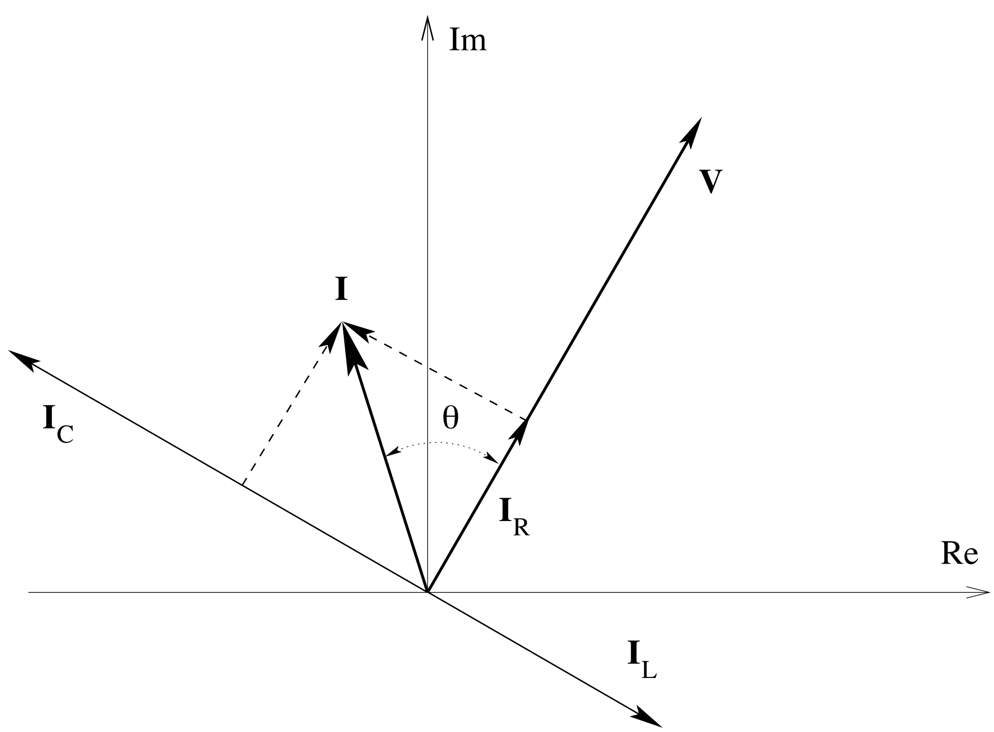
FYS1120 H-10: Løsningsforslag for avsluttende eksamen

Oppgave 1
Figuren viser en parallellkoblet RCL-krets. Den ohmske motstanden er $R = 50.0\,\Omega$, kondensatoren har en kapasitet $C = 10.0\,\mu\text{F}$ og spolen en induktans $L = 3.5\,\text{mH}$.



Kretsen blir drevet av en vekselspenning $V(t) = V_0 \cos(2\pi f t)$ med amplitude $V_0 = 6.0\,\text{V}$ og frekvens $f = 1.25\,\text{kHz}$. De følgende spørsmål besvares enklest ved bruk av komplekse variable.

1a) Finn strømmene gjennom hvert kretselement og tegn dem inn i et fasediagram.
Strøm gjennom impedans Z er $I_Z = V/Z = (V_0/Z)e^{i\omega t}$. For motstanden er $Z = R$ og derfor $I_R = (V_0/R)e^{i\omega t}$ hvor $V_0/R = 0.12\,A$. Kondensatoren har $Z_C = 1/i\omega C =$



$e^{-i\pi/2}/\omega C$ slik at strømmen $I_C = (V_0\omega C)e^{i(\omega t+\pi/2)}$ ligger 90^0 foran spenningen med amplitude $V_0\omega C = 6.0\,V \times 6.28 \times 1250\,s^{-1} \times 10 \times 10^{-6}F = 6.0V/12.7\,\Omega = 0.47\,A$. På samme måte for spolen med $Z_L = i\omega L = e^{i\pi/2}\omega L$ vil strømmen ligge 90^0 etter spenningen med amplitude $V_0/\omega L = 6.0\,V/27.5\,\Omega = 0.22\,A$. Disse partialstrømmene er tegnet inn i fasediagrammet.

1b) Beregn den totale impedansen til kretsen, både størrelse og fasevinkel.

De tre kretselementene er koblet i parallell og derfor er den totale impedans gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{50.0}\Omega^{-1} + i\Big(\frac{1}{12.7} - \frac{1}{27.5}\Big)\Omega^{-1} \\ &= (2.0 + 4.23\,i) \times 10^{-2}\,\Omega^{-1} \end{aligned}$$

slik at $Z = Z_0\epsilon^{i\theta}$ med $1/Z_0 = (2.0^2 + 4.23^2)^{1/2} \times 10^{-2}\,\Omega^{-1} = 4.68\ \times 10^{-2}\,\Omega^{-1}$. Derfor er $Z_0 = 100\,\Omega/4.68 = 21.4\,\Omega$ med fasevinkel gitt ved $\tan\theta = -4.23/2.0$, i.e. $\theta = -64.7^0$.

1c) Hva blir den midlere effekt (W) som spenningskilden leverer?

Midlere effekt er gitt som $\bar{P} = (1/2)V_0 I_0 \cos\theta$ hvor den totale strømamplitude er $I_0 = V_0/Z_0 = 6.0\,V/21.4\,\Omega = 0.28\,A$. Det gir $\bar{P} = 3.0 \times 0.28\,W \cos 64.7 = 0.36\,W$.

Oppgave 2

En elektrisk ladet kule har radius R. Den har en total ladning Q som er jevnt fordelt over dens volum.

1a) Beregn det elektriske feltet $E(r)$ som funksjon av den radielle avstand r fra kulens sentrum.

Ladningstettheten er $\rho = 3Q/4\pi R^3$ og dermed er feltet for $r < R$ gitt ved Gauss' lov som $4\pi r^2 E = (4\pi r^3/3)\rho\varepsilon_0$, i.e. $E = \rho r/3\varepsilon_0$. Når $r > R$ gir samme lov $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

1b) Finn potensialet $V(r)$ til ladningsfordelingen når det settes lik null for $r \to \infty$.

Siden feltet $E(r) = -dV/dr$, finner vi potensialet $V(r)$ fra feltet direkte ved integrasjon. For $r < R$ gir dette $V(r) = -\rho r^2/6\varepsilon_0 + C$. Integrasjonskonstanten C bestemmes ved å matche dette potensialet ved $r = R$ med potensialet $V = Q/4\pi\varepsilon_0 r$ utenfor kula. Det gir $C = 3Q/8\pi\varepsilon_0 R$. Demed kan potensialet for $r < R$ skrives som

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[3 - \Big(\frac{r}{R}\Big)^2\right]$$

1c) Kulens elektriske energi kan beregnes på flere forskjellige måter. Hvilke kjenner du? Velg en og finn den totale energien til kula.

Man kan benytte den elektriske feltenergitettheten $u_E = (1/2)\varepsilon_0 E^2$ *og integrere den over hele kulen og i rommet utenfor. Eller man kan bruke at den totale energien er gitt ved integralet*

$$U_E = \frac{1}{2}\int d^3x\rho V(r)$$

I vårt tilfelle er ρ *konstant og integralet går bare over selve kulen. Det gir med en gang*

$$U_E = \frac{\rho}{2}\int_0^R 4\pi r^2 dr V(r) = \frac{2\pi\rho Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R dr\left[3r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right] = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

En tredje mulighet er å bygge opp den totale ladningen ved å bringe inn skall med ladning $\rho 4\pi r^2 dr$ *fra* $r \to \infty$ *til en kule med radius* r *og så integrere* r *fra 0 til* R*.*

Oppgave 3

I en koaksialkabel for TV har den indre leder radius a, mens den ytre leder har indre radius b. Den indre leder fører en vekselstrøm $I(z,t) = I_0\cos(kz - \omega t)$ hvor z er en koordinat langs kabelen. Strømmen i den ytre leder har samme verdi, men er motsatt rettet. Vinkelfrekvensen ω er gitt ved konstanten k som $\omega = ck$ hvor $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ er lyshastigheten.

1a) Bruk Amperes lov til å beregne magnetiske feltet B mellom de to lederne som funksjon av radius r samt z og t.

Magnetfeltet er sirkulært i dette rommet og gitt som

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos(kz - \omega t)$$

1b) Bruk av Faradays lov tilsier nå at det vil bli indusert et radielt, elektrisk felt E i kabelen. Som for en elektromagnetiske bølge i vakum, kan man vise at disse to feltene er koblet sammen ved differensialligningen

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Denne følger også direkte fra Maxwells 2. ligning. Finn nå feltet $E(r,z,t)$ ved direkte integrasjon av ligningen.

Vi finner $\partial E/\partial z = -(\mu_0 I_0/2\pi r)\omega \sin(kz - \omega t)$ *som ved integrasjon gir*

$$E(r, z, t) = \frac{\mu_0 \omega I_0}{2\pi k r} \cos(kz - \omega t)$$

Her er ingen integrasjonskonstant e.l. da vi må ha $E = 0$ når $I = 0$.

1c) Bruk dette resultatet til å regne ut potensialet $V(z, t)$ mellom de to lederne. Vis at $V = ZI$ og finn konstanten Z målt i Ω.

Potensialforskjellen mellom indre og ytre leder blir dermed

$$V(z, t) = \int_a^b dr E(r, z, t) = \frac{\mu_0 \omega I_0}{2\pi k} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$

Nå er $c = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$ *slik at* $\mu_0 \omega / k = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \equiv Z_0 = 120\pi\,\Omega = 377\,\Omega$. *Dermed kan vi skrive at* $V = ZI$ *hvor*

$$Z = \frac{Z_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 60\,\Omega \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Oppgave 4

I en syklotron er feltet $B = 0.85\,\mathrm{T}$ mellom polene til magneten. De har hver en radius på $R = 0.4\,\mathrm{m}$ som er den største radius en partikkelbane kan ha.

1a) Hva er den maksimale energi (MeV) et proton kan få i denne akseleratoren?

Impulsen til partikkelen $p = erB$ *slik at den maksimale verdi blir* $p_{max} = eRB = 1.60 \times 10^{-19} C \times 0.4\,m \times 0.85\,T = 5.44 \times 10^{-20} Ns$. *Den tilsvarende maksimale verdi er dermed* $E_{max} = p_{max}^2/2m = 8.86 \times 10^{-13} J = 8.86 \times 10^{-13}/1.60 \times 10^{-19} eV = 5.54\,MeV$.

1b) Hvordan varierer omløpstiden T til et proton med radius i løpet av akselerasjonen i syklotronen? Hvor stor blir T i siste omløp ved radius R?

Siden dette er ikke-relativistisk bevegelse, er omløpstiden $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ *uavhengig av radius* r *og lik den i siste runde, i.e.* $T = 2\pi R m/p_{max} = 7.72 \times 10^{-8} s$.

1c) Hva er den maksimalt oppnåelige energi for en α-partikkel i denne akseleratoren?

En α*-partikkel med dobbelt så stor ladning vil dermed få dobbelt så stor* p_{max}. *Men siden den har en masse som er fire ganger så stor, vil* E_{max} *for* α*-partikkelen bli den samme* $E_{max} = 5.54\,MeV$.

- -