UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny / utsatt eksamen i: FYS1120 – Elektromagnetisme
Eksamensdag: 11. januar 2013
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30
Oppgavesettet er på: 2 sider
Vedlegg: Formelark (3 sider)
Tillatte hjelpemidler: Utdelt formelark og godkjent kalkulator
Angell (eller Øgrim) og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

En kondensator med parallelle plater har kapasitansen C = 12,5 pF når volumet mellom platene er fylt med luft. Platene er sirkulære med en radius på 3 cm. Når kondensatoren kobles til et batteri får platene en ladning på ± 25 pC.

a) Mens kondensatoren fortsatt er koblet til batteriet skyves et dielektrikum inn mellom platene. Dette fyller hele volumet mellom platene. Etter dette har platene en ladning på ± 45 pC. Hva er dielektrikumets relative permittivitet ε_r? (Relativ permittivitet er det samme som dielektrisitetskonstant.)

Kapasitansen endres med en faktor ε_r når dielektrikumet skyves inn. Siden V fortsatt er uendret (batteriet er fortsatt tilkoblet), får vi:

$$\frac{C_{\text{etter}}}{C_{\text{før}}} = \frac{Q_{\text{etter}}}{Q_{\text{før}}} = \frac{45\,\text{pC}}{25\,\text{pC}} = \varepsilon_r = \underline{\underline{1.8}}$$

b) Hva er potensialforskjellen mellom platene før og etter at dielektrikumet er skjøvet inn?

Platenes areal er $\pi r^2 = \pi(0.03\text{ m})^2 = 2.827\times10^{-3}\text{ m}^2$ og avstanden mellom platene er derfor:

$$d = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}{C} = \frac{(1.00)(8.85\times10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.827\times10^{-3}\text{ m}^2)}{12.5\times10^{-12}\text{ farad}} = \underline{2.00\times10^{-3}\text{ m}}$$

Før dielektrikumet skyves inn, har vi at:

$$C = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}{d} = \frac{Q}{V}$$

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon_r\varepsilon_0 A} = \frac{(25.0\times10^{-12}\text{ C})(2.00\times10^{-3}\text{ m})}{(1.00)(8.85\times10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.827\times10^{-3}\text{ m}^2)} = \underline{\underline{2.00\text{ V}}}$$

Siden batteriet fortsatt er tilkoblet er potensialforskjellen den samme etter at dielektrikumet er skjøvet inn.

c) Hva er den elektriske feltstyrken i et punkt midt mellom platene før og etter at dielektrikumet er skjøvet inn?

Før dielektrikumet skyves inn,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A} = \frac{25.0 \times 10^{-12}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(1.00)(2.827 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)} = \underline{\underline{999\ \text{N/C}}}$$

Siden potensialforskjellen er den samme etter at dielektrikumet er skjøvet inn, vil også elektrisk feltstyrke være den samme.

Oppgave 2

En massiv metallkule med radius R har en jevn overflateladning σ.

a) Finn den totale ladningen til kula.

$$Q = \sigma \cdot \text{overflateareal} = \underline{\underline{4\pi\sigma R^2}}$$

b) Hva er den totale elektriske fluksen gjennom en konsentrisk (samme sentrum) kuleflate med radius r?

Den totale elektriske fluksen gjennom en konsentrisk kuleflate S med radius r er gitt ved Gauss lov for elektriske felt:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{innenfor}}{\varepsilon_0}$$

Dersom kuleflaten S har en radius som er mindre enn metallkulens radius, er det ingen netto ladning på innsiden av S, og fluksen vil da være null. For kuleflater S med radius større enn metallkulen, vil vi få:

$$\Phi_E = \frac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0}$$

c) Beregn det elektriske feltet i overflaten av kula.

Vi bruker Gauss lov: $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0}$

Elektrisk felt må av symmetrigrunner være radielt rettet og kulesymmetrisk. Det vil si at: $\vec{E} \cdot \vec{dS} = E(r) \cdot dS$, og følgelig:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_S E(r) \cdot ds = E(r) \cdot \oint_S dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0}$$

Dersom vi betrakter feltet like utenfor kuleoverflaten slik at r ≈ R, får vi:

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

d) Verifiser at resultatet stemmer overens med den generelle formelen for elektrisk felt utenfor en metalloverflate i vakuum (hvor $\vec{n}$ er en enhetsvektor som står normalt på overflaten):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}$$

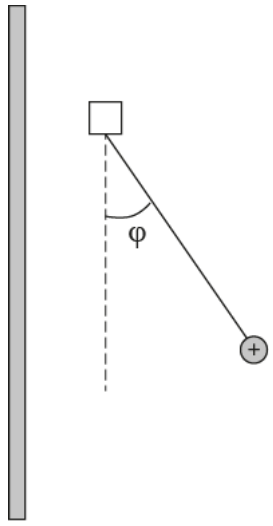
Dersom vi vil ha med retningen også, kan vi bruke normalenhetsvektor til kuleflaten (siden denne vil være radielt rettet), og får da:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}$$

som er identisk med det generelle uttrykket for elektrisk felt like utenfor en metalloverflate.

Oppgave 3

En liten kule med masse 1,0 gram har en ladning på 100 μC. Den henger i en tynn (masseløs) tråd nær en stor, tynn, vertikal plate med uniform ladningsfordeling på 2,5 nC/m^2.



a) Skriv opp Gauss lov og forklar alle symbolene som inngår. Bruk så loven til å beregne det elektriske feltet utenfor platen.

For Gauss' lov, se boka …

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{qA}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\varepsilon_0} = \underline{\underline{141.2 \tfrac{V}{m}}}$$

hvor q er ladningstetthet.

b) Beregn trådens vinkel φ som er vist i figuren til høyre.

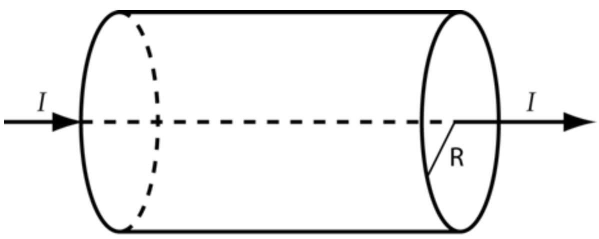
$$\text{Horisontalt}: \quad F = E \cdot Q = 141.2 \cdot 10^{-4} = \underline{0.0141 N}$$

$$\text{Vertikalt}: \quad \mathrm{F = m \cdot g} = 10^{-3} \cdot 9.8 = \underline{0.0098 N}$$

$$Atg \frac{0.0141}{0.0098} = \underline{\underline{55.20°}}$$

Oppgave 4

En lang sylindrisk leder med radius R fører en strøm I som er jevnt fordelt over tverrsnittet av lederen (se figur til høyre).



a) Bestem magnetfeltet **B** som funksjon av avstanden r fra lederens akse for r < R (inne i lederen) og for r > R (utenfor lederen). Skisser magnetfeltet som funksjon av r.

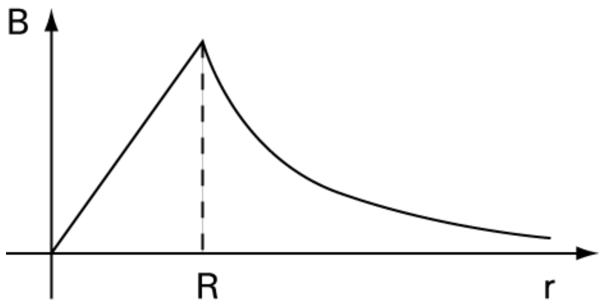
Bruker Amperes lov $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i$ og velger integrasjonsveier (Ampereveier) som konsentriske sirkler rundt lederens lengdeakse.

For r<R:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B2\pi r = \mu_0 i$$

Strømtetthet $J = \dfrac{I}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad i = J\left(\pi r^2\right) = \dfrac{r^2}{R^2} I$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r^2 I}{2\pi r R^2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}}}$$



For r>R:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B2\pi r = \mu_0 i = \mu_0 I$$

$$B = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$$

Oppgave 5

a) En motstand R = 10 kΩ er koblet i parallell med en kondensator C = 500 pF. Hva er den totale impedansen ved frekvensen f = 300 kHz? Oppgi både modul (absoluttverdi av impedansen) og fasevinkel.

Enklest å starte med admittans siden det er en parallellkobling:

$$Y = \frac{1}{R} + j(2\cdot\pi\cdot f\cdot C) = 10^{-4} + j9{,}4\cdot 10^{-4}$$

$|Y| = \sqrt{\left(10^{-4}\right)^2 + \left(9{,}4\cdot 10^{-4}\right)^2} = \underline{9{,}5\cdot 10^{-4}}$, altså $\underline{950\ \mu\text{S}}$

Fasen $\varphi_Y = atg\left(\dfrac{9{,}4\cdot 10^{-4}}{10^{-4}}\right) = atg(9{,}4) = \underline{83{,}9^\circ}$

Vi får da: Impedans (modul) $|Z| = \dfrac{1}{|Y|} = \underline{1053\ \Omega}$

Fasen $\varphi_Z = -\varphi_Y = \underline{-83{,}9^\circ}$

b) Hva er kretsens konduktans G og susceptans B?

Se første del av svaret på a). G = <u>100 µS</u> og B = <u>940 µS</u> (husk at Y = G + jB)

c) Vi påtrykker en spenning på 10 V rms, 300 kHz over denne parallellkoblingen. Hva blir midlere avgitt effekt i kretsen?

$P = UI\cos\varphi = \dfrac{U^2}{Z}\cos\varphi = U^2 Y\cos\varphi = U^2 G = (10)^2\cdot 10^{-4} = 0{,}01$, altså <u>10 mW</u>