

FYS1120: Oblig - Syklotron

Obligatorisk oppgave i FYS1120-Elektromagnetisme gitt ved UiO høsten 2013. Obligen begynner med noen innledende oppgaver som tar for seg partikler i elektrisk og magnetisk felt hver for seg. Programmene du skriver for å løse disse oppgavene vil være svært like programmene fra de siste numeriske ukeoppgavene. Deretter følger oppgaver der vi kombinerer elektrisk og magnetisk felt til en syklotron.

Praktisk informasjon

Innleveringsfristen er fredag 25. oktober klokken 15:30. Besvarelsen leveres i Devilry, som du finner på <https://devilry.ifi.uio.no>. Logg inn med brukenavn og passord fra UiO.

Besvarelsen skal bestå av et pdf-dokument utformet som en rapport, samt alle kodefilene. Alle figurer skal ha figurnummer og figurtekst. Det skal være navn på aksene, men siden vi jobber med dimensjonsløse størrelser trenger du ikke angi enhet. Dersom det er flere grafer i samme plott skal de ha forskjellig farge/markør og en tegnforklaring ("legend"). Kodefilene lastes opp enkeltvis. Unngå kode i rapporten.

Det er god skrivetrening å gi korte og konsise svar på alle spørsmål som stilles i oppgavene. Det krever bedre forståelse og oversikt å gi et enkelt svar som allikevel dekker nøyaktig det oppgaven ber om, enn en lang diskusjon som tilfeldigvis også er innom selve svaret. Med mindre noe annet er spesifisert ønsker vi at svar gis med noen få setninger.

Vi oppfordrer dere til å samarbeide, fordi man lærer mye av å diskutere og forklare for hverandre. Sammen vil man også langt lettere finne feil i koden. Hver student skal allikevel *skrive sin egen kode og sin egen rapport* og besvarelsene leveres og vurderes individuelt. Alle skal følge god akademisk praksis og oppgi i rapporten hvem de har samarbeidet med og eventuelle kilder de har brukt.

Dersom dere svarer blankt på en oppgave eller skriver kommentarer av typen "dette fikk jeg ikke til", har ikke den som retter noe annet valg enn å gi null uttelling. Det er ofte helt unødvendig. Dersom du vet at figurene du får er feil, så bør du putte dem inn i rapporten og forklare hvorfor de er feil. Det viser at du har forstått hva som bør forventes, ofte basert på en fysisk eller matematisk innsikt i problemet. Kanskje er det bare en liten detalj som mangler før du får riktig svar. Dersom du etter en utledning får et svar som ikke fungerer eller virker galt bør du skrive det! Gjør du en dimensjonsanalyse og viser at svaret ditt har feil enheter viser du at du kan tenke som en fysiker, og du kan få en del poeng selv om du ikke klarer å lokalisere feilen.

I arbeidet med obliger har dere i tillegg flere muligheter til å søke hjelp, og det er derfor ingen grunn til å svare blankt. Snakk med medstudenter eller lærere, og benytt det undervisningstilbudet som gis. Dere er ikke garantert å få til alt, men dere vil nesten helt sikkert bygge opp innsikt i hver oppgave som dere kan putte inn i rapporten.

Oppgave 1: Partikkel i elektrisk felt

I denne innledende oppgaven skal du skrive et program som beregner banen til en partikkel som beveger seg i et elektrisk felt \mathbf{E} . For enkelhets skyld gjør vi tidsintegrasjonen med Euler-Cromers metode. I

Euler-Cromers metode brukes den nyeste verdien av hastigheten \mathbf{v} til å beregne neste verdi av posisjonen $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

- Plasser en partikkel med masse $m = 2$ og ladning $q = 3$ (som vanlig bruker vi dimensjonsløse størrelser) i et konstant elektrisk felt $\mathbf{E} = (5, 0, 0)$. Velg $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$. Integrer bevegelsen fra $t = 0$ til $t = 1$ med tidssteg $dt = 10^{-4}$. Plott partikkelens x -posisjon som funksjon av t for alle t .
- Finn den analytiske løsningen og plott denne i samme aksekors som den numeriske løsningen.
- Velg så $\mathbf{E} = (1, 2, -5)$. Plott $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ i samme aksekors med hver sin farge. Lag et annet plott som viser $v_x(t)$, $v_y(t)$ og $v_z(t)$. Hvordan kan du se at dette er en ballistisk bevegelse?
- Vis banen til partikkelen i oppgave c) i 3D. Tenk gjerne ut en fremstilling som gir et inntrykk av partikkelens akselerasjon.

Oppgave 2: Partikkel i magnetisk felt

I denne oppgaven bytter vi ut det elektriske feltet med et magnetisk felt \mathbf{B} . Partikkelen påvirkes av en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

der q er ladningen og \mathbf{v} hastigheten til partikkelen. Hvis du vil lære mer om magnetiske felter anbefales *OpenCourseWare* fra MIT. Forelesning 11 i kurset “Electricity and magnetism” er et godt startpunkt. Forelesning 13 fra samme kursserie tar blant annet for seg syklotronen.[1]

- Velg $m = 2$, $q = 3$, $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{v}(t = 0) = (5, 0, 0)$. La magnetfeltet være $\mathbf{B} = (0, 0, 3)$. Se på bevegelsen fra $t = 0$ til $t = 5$. Plott $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ i samme aksekors med hver sin farge. Lag et annet plott som viser $v_x(t)$, $v_y(t)$ og $v_z(t)$. Ta også med et plott som viser banen til partikkelen i 3D.
- Mål omløpstiden T til partikkelen.
- Vis analytisk at syklotronfrekvensen til dette systemet er

$$\omega_c = \frac{qB}{m},$$

der $B = |\mathbf{B}|$, og bruk dette til å vise at

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Kommenter det numeriske resultatet fra oppgave b).

- Gå tilbake til oppgave a) og endre initialhastigheten til $\mathbf{v}(t = 0) = (5, 0, 2)$. Lag plottet som viser banen til partikkelen i 3D. Sammenlign gjerne med den analytiske løsningen.

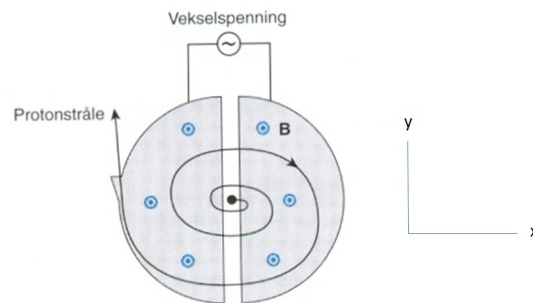
Oppgave 3: Partikkel i syklotron

En syklotron er en partikkelakselerator for ladde partikler. Energi tilføres av et elektrisk felt, mens et magnetisk felt brukes for å holde partiklene inne i syklotronen. En enkel syklotron består av to lukkede metalliske halvsyndere plassert like ved siden av hverandre, som vist i Figur 1. Halvsynderne, som ofte kalles D-er på grunn av formen, ligger i et konstant magnetfelt vinkelrett på papirplanet. En protonkilde fører protoner inn i området mellom sylindrene, vi skal se på bevegelsen til et slikt proton. Mellom halvsynderne virker det et oscillerende \mathbf{E} -felt i x -retningen. Inne i halvsynderne er det elektriske feltet lik null. Ved at spenningen over halvsynderne veksler i takt med syklotronfrekvensen protonene har i \mathbf{B} -feltet vil de få en akselerasjon hver gang de passerer fra en halvsynder til den andre. Dermed vil

farten og radien øke ved hver passering. Når partikkelbanens radius blir større enn radien i sylindrerne forlater partiklene syklotronen.

En partikkel i en syklotron vil kunne oppnå relativistiske hastigheter, og det vil gi relativistiske korreksjoner til banen. Disse skal vi se bort fra i vår modell.

Universitet i Oslo har en syklotron som brukes til forskning og til medisinske formål. Du kan lese mer om den på oc1.uio.no.



Figur 1: Skisse av en syklotron. Hentet fra Lillestøl et al. [2].

- a) Lag et nytt program med utgangspunkt i et av de foregående programmene, nå for bevegelse i kombinert \mathbf{E} - og \mathbf{B} -felt. Bruk $m = 1$, $q = 1$, $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$. Sett $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ og

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x & \text{for } x \in [-0.1, 0.1], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vinkelfrekvensen ω må du velge lik syklotronfrekvensen. La tiden gå fra 0 til 50. Plott $x(t)$ mot $y(t)$. Hvorfor øker ikke radien like mye i hvert omløp?

- b) I virkeligheten har D-ene i syklotronen en radius r_D , slik at partikkelen må slippe ut i det den når veggene. Sett $r_D = 2.6$ og implementer dette. Plott $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ mot t i samme figur. Plott også $v_x(t)$, $v_y(t)$ og $v_z(t)$ mot t i en annen figur.
- c) Finn farten partikkelen forlater syklotronen med.
- d) Vår modell for syklotronen lyver litt om hvor mye energi som tilføres partikkelen i hvert omløp, slik at partikkelen slippes ut av syklotronen etter bare noen få omløp. I denne og neste oppgave ser vi nærmere på en virkelig syklotron. Vis at den kinetiske energien til partikkelen kan skrives

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 r^2}{m}$$

der $r = |\mathbf{r}|$. Finn energien et proton har når $r = 1\text{m}$ hvis $B = 1\text{T}$. Uttrykk svaret i MeV. Sammenlign med protonmassen og kommenter den ikke-relativistiske tilnærmingen som er gjort i modellen.

- e) Hvor mye energi som tilføres partikkelen i hvert hele omløp bestemmes av potensialforskjellen mellom D-ene når partikkelen passerer åpningen. Anslå en eksperimentelt tilgjengelig verdi for denne og regn ut hvor mange omløp som skal til før et proton slipper ut av en syklotron med $r = 1\text{m}$ og $B = 1\text{T}$. Hva må frekvensen til \mathbf{E} -feltet være? Angi svaret i Hz.

Bibliografi

- [1] Walter Lewin. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02-electricity-and-magnetism-spring-2002/video-lectures/>. Besøkt 09.09.2010.

- [2] Egil Lillestøl, Ola Hunderi, and Jan R. Lien. *Generell fysikk for universiteter og høyskoler*, volume 2. Universitetsforlaget, 2001.