UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS1120 Elektromagnetisme
Eksamensdag: 6. oktober 2014.
Tid for eksamen: 10:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: Liste med likninger (3 sider)
Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

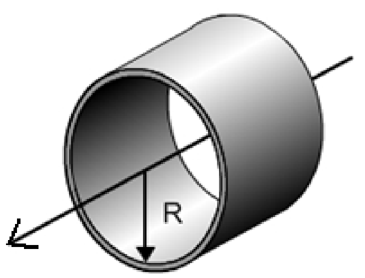
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

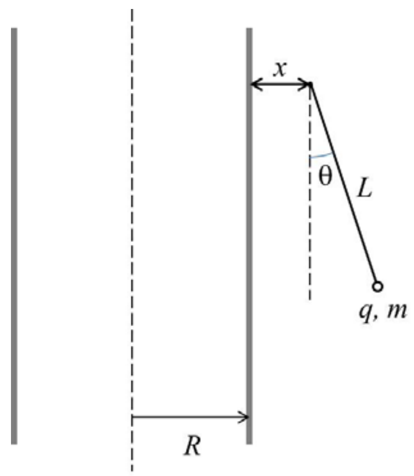
(a) Skriv opp Gauss' lov, og forklar symbolenes betydning.

SVAR: Gauss' lov kan skrives; $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{encl} / \varepsilon_0$, der integralet går over en lukket flate. Her er Φ_E den totale fluksen av det elektriske feltet, $\vec{E}$, gjennom flate-elementene, $d\vec{A}$. Ladningen som omsluttes av flaten er Q_{encl}, og ε_0 er vakuum permittiviteten.

En hul sylinder med neglisjerbar veggtykkelse har en uniform overflateladningstetthet σ. Sylinderen har radius *R*, se figur under, og vi regner sylinderen som uendelig lang.



Utsnitt av sylinderen



Sylinder og snor med kule sett fra siden

b) Bruk Gauss' lov til å beregne det elektriske feltet utenfor sylinderen.

SVAR: Vi legger Gauss flaten som en sylinderflate konsentrisk med den ladde sylinderen. Av symmetrien følger det at E-feltet er rettet radielt, og for en sylinderflate med radius r>R blir fluksen av E-feltet gjennom en vilkårlig lengde l av sylinderen, $\Phi_E = E(r)\, 2\pi\, r\, l$. Ladningen som da omsluttes av flaten er $Q = \sigma\, 2\pi\, R\, l$, og Gauss' lov gir dermed at

$$E(r) = \sigma R/\varepsilon_0 r\ ,$$

og retningen på feltet peker vekk fra/inn mot sylinderaksen dersom σ er positiv/negativ.

Betrakt nå en slik sylinder der R =10 cm og $\sigma = 2\times10^{-5}$ C/m^2. I en avstand x = 5 cm ut fra sylinder-veggen festes en masseløs snor med lengde L= 30 cm. I den andre enden henger en liten kule med masse m = 0.4 kg og ukjent ladning q. Snora og vertikalen utspenner en vinkel θ = 20° når kula er i ro.

c) Finn ladningen, q.

SVAR: Geometrien medfører at kula befinner seg i avstanden, $r = R + x + L \sin\theta$ fra sylinderaksen, og der har den elektriske kraften størrelsen, $F_e = q\, E(r) = q\, \sigma R / [\, \varepsilon_0 (R + x + L \sin\theta)\,]$. Sammen med tyngde-kraften på kula må resultanten av de 2 vektorene peke langs snora, og derfor gjelder at, $\tan\,\theta = F_e\, /\, mg = q\, \sigma R\, / \,[mg\, \varepsilon_0 (R + x + L \sin\theta)\,]$. Her er q eneste ukjente, og ved innsetting av de oppgitte tallverdier finner man at q = 1.6 μC.

d) Hva blir vinkelen θ dersom snoras opphengspunkt er 5 cm *innenfor* sylinderflaten?

SVAR: Bruker vi Gauss' lov anvendt på en tilsvarende sylinderflate men som ligger innenfor den ladde sylinderveggen vil ladningen som omsluttes av Gauss-flaten være null. Da følger det at E-feltet også er null, og dermed forsvinner den elektriske kraften på q når den plasseres innenfor sylinderveggen, dvs. θ = 0.

Oppgave 2

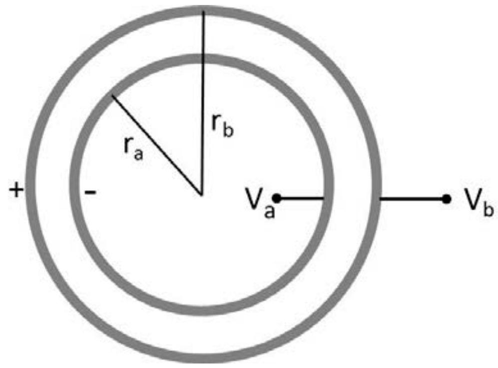
(a) Hva er en kondensator? Beskriv hvordan kapasitans defineres.
Skriv ned uttrykket for kapasitansen til en parallell-plate kondensator med et dielektrikum mellom platene, og definer alle symbolene i uttrykket.

SVAR: se seksjon 4.1 i læreboka

(b) Lag en skisse av en parallell-plate kondensator med et dielektrikum mellom platene, og illustrer fordelingen av ladning når kondensatorplatene er ladet med en overflate-tetthet σ. Regn ut det elektriske feltet mellom platene når $\sigma = 10^{-8}$ C/m^2 og dielektrisitets-konstanten er lik 4.

SVAR: Skisse: Se Fig. 4.15(b) i læreboka.
E-feltet mellom platene, dvs i dielektrikumet, er gitt ved $E = \sigma/(K\varepsilon_0)$ der K = 4. Innsettes tallverdier får man $E = 2.8\ 10^2$ V/m.

Figuren under viser et sentralt snitt gjennom en kuleformet kondensator. De 2 tynne kuleskallene, som har radius r_a og r_b , er uten dielektrikum imellom, og har respektive ladninger –Q og +Q.



(c) Vis at potensialforskjellen mellom skallene kan skrives;

$$V_b - V_a = Q(r_b - r_a)/(4\pi\varepsilon_0\, r_a r_b)\ .$$

SVAR: Se eksempel 4.3 i læreboka.

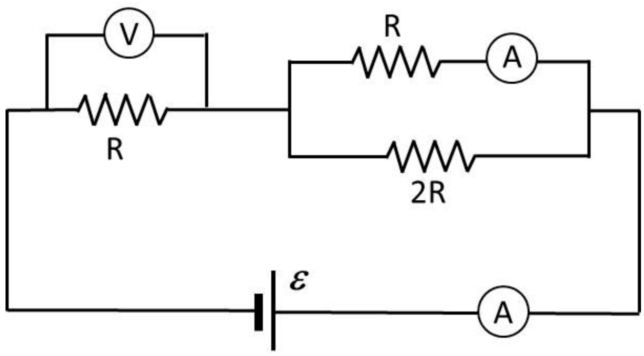
(d) Beregn kapasitansen dersom r_a = 10 cm, r_b = 15 cm, og Q = 1 nC.
Bestem også hvor mye energi som er lagret i kondensatoren.

SVAR: Bruker at kapasitansen er gitt som $C = Q/(V_b - V_a) = 4\pi\varepsilon_0\, r_a r_b/(r_b - r_a)$, som ved innsetting av tall gir C = 33 pF.

Energien lagret i kondensatoren er, $U = Q^2/2C = 1.5\ 10^{-8}$ J.

Oppgave 3

Betrakt kretsen vist under, der alle måleinstrumentene regnes som ideelle.



La R = 3 Ω og $\mathcal{E}$ = 10 V, og se bort fra indre resistans i batteriet.

(a) Bestem strømmen som måles av amperemeteret i hovedgreina, og spenningen målt av voltmeteret.

SVAR: Med ideelle måleinstrumenter kan kretsen regnes som et batteri koplet i serie med en resistans R, og resultanten av $2R$ i parallell med R, som er $2R/3$. Totalresistansen i kretsen er derfor $5R/3$ = 5 Ω. Strømmen i hovedgreina, I, er gitt av $\mathcal{E} = (5R/3)\, I$, som gir I = 2 A. Voltmeteret måler da spenningen RI, dvs. 6 V.

(b) Bestem strømmen målt av amperemeteret i parallellkoplingen.

SVAR: Spenningsfallet over parallelkoplingen blir da batterispenningen minus 6 V, dvs. 4 V, og strømmen målt i den øvre greina blir, $I_1 = 4\text{ V}/R = 4/3\text{ A}$.

(c) Bestem effektutviklingen i hver av de 3 resistansene.

SVAR: Resistansen i parallell med voltmeteret utvikler effekten $P = RI^2 = 12$ W.
Resistansen R i serie med amperemeteret utvikler $P_1 = R\,I_1^2 = 16/3$ W.
Resistansen $2R$ utvikler $P_2 = 2R\,(I - I_1)^2 = 8/3$ W.

(d) I en stasjonær strøm av ladninger, q, med drifthastighet, $\boldsymbol{v}_\mathrm{d}$, kan strømtettheten skrives som, $\boldsymbol{J} = nq\boldsymbol{v}_\mathrm{d}$, der n er antall ladninger per volum.
Vis dette.

SVAR: Se læreboka, seksjon 5.1, der formelen over utledes.