kalkulus – introforelesninger f

0. H2016.

dørge

…enget: Lære (repetere?) det vi trenger for å gjøre el-mag.

Fokus på bruk, ikke på bevis.

Stopp meg gjerne med spørsmål!

Plan: 3 forelesninger + 1 repetisjon/eksempl…

- Hva er en vektor?
- Notasjon
- Regneoperasjoner med vektorer: Prikkprodukt & kryssprodukt
- Felter: skalare og vektorielle
- Koordinatsystemer: Kartesiske og polare.
- Derivasjon av felter: Gradient, divergens og virvling. Nabla-operatoren.

Integrasjon av felter: Linje-, fluks- og volumintegral.

…kes' teorem: Linjeintegral <=> virvling + fluks-

1

…ss' teorem: Fluks…

Hva er en vektor?

Et „flerdimensjonalt tall", noe som har lengde og retning.
Vanligvis 2- eller 3-dimensjonal.

Notasjon:

Vi kan skrive vektorer på

- matriseform:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ x \\ z^4 \end{bmatrix}$$

eller med enhetsvektorer:

- $a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$, $\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, $0{,}6\vec{e}_x + x\vec{e}_y + z^4\vec{e}_z$.

De er relatert slik:

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2

(i 2-D blir det $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Regneoperasjoner

Addisjon: To vektorer med lik dimensjon kan adderes.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 4+6 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}}}.$$

- $$(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) + (2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y)$$

$$= \underline{\underline{(a+2)\vec{e}_x + (b+5)\vec{e}_y}}.$$

- $$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Multiplikasjon med skalar:

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}}}.$$

$$z \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} za \\ zb \\ zc \end{bmatrix} //$$

„Skalerer vektoren".

Prikkprodukt: To vektorer med lik dimensjonalitet kan multipliseres

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd.$$

- Gir et <u>tall</u>.

(Teknisk sett matrisemultiplikasjon:

$$[a, b] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [ac+bd]_{1\times 1} = ac+bd)$$

- $$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{osv.}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{osv.}$$

$$(3\vec{e}_x + 2e_z) \cdot (5\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)$$

$$= 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6.}}$$

Kryssprodukt:

En annen måte å multiplisere sammen vektorer som gir ut en ny vektor. Nb! Bare for 3d-vektorer

Regnes ut som en <u>determinant</u>:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ u_y & u_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ u_x & u_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x (v_y u_z - v_z u_y) - \vec{e}_y (v_x u_z - v_z u_x)$$
$$+ \vec{e}_z (v_x u_y - v_y u_x).$$

<u>Eks</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x(3\cdot 1 - 2\cdot 6) - \vec{e}_y(1\cdot 1 - 2\cdot 5) + \vec{e}_z(1\cdot 6 - 3\cdot 5)$$

$$= 9\vec{e}_x + 9\vec{e}_y - 9\vec{e}_z.$$

- Skalarfelter

En funksjon av koordinater. Gir et tall i hvert punkt i rommet.

Eks: Temperatur $T(x,y,z)$

Trykk $p(x,y,z)$

- Elektrisk ladningstetthet $\rho(x,y,z)$

Legg merke til:

Koordinatene utgjør en vektor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \Rightarrow T(\vec{r}),\ \rho(\vec{r}) \text{ osv.}$$

Eks: $h(x,y,z) = x^2 + yz.$

$g(x,y,z) = ?$

Vektorfelter

Også en funksjon av koordnater. Har en vektorverdi i et hvert punkt.

Eks: Vind $\vec{v}(x,y,z) = \vec{v}(\vec{r})$

Vannstrømning

Elektrisk og magnetisk felt $\vec{E}(\vec{r})$ og $\vec{B}(\vec{r})$

Hvis vi skriver $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{bmatrix}$

$$= v_x(\vec{r})\vec{e}_x + v_y(\vec{r})\vec{e}_y + v_z(\vec{r})\vec{e}_z,$$

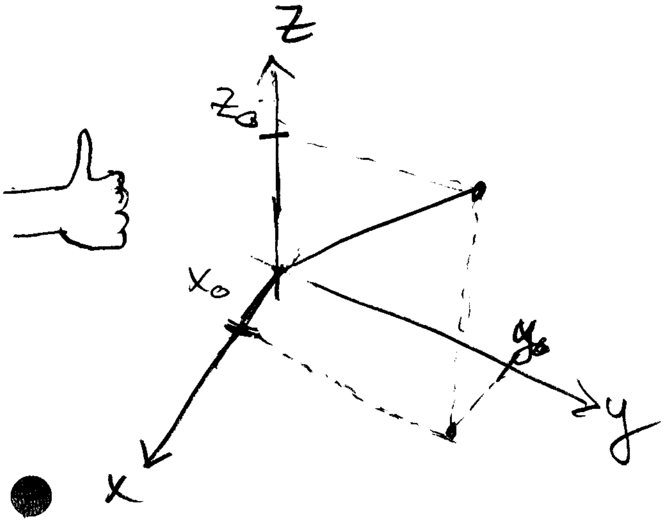
så kan vi tenke på hver komponent $v_i(\vec{r})$ som et skalarfelt.

Eks $\vec{g}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ z^2 \end{bmatrix} = 2\vec{e}_x + x\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z.$

$$\vec{h}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x \\ z \\ y \end{bmatrix} = 2x\vec{e}_x + z\vec{e}_y + y\vec{e}_z.$$

Koordinatsystemer

Kartesiske koordinater (x, y, z).



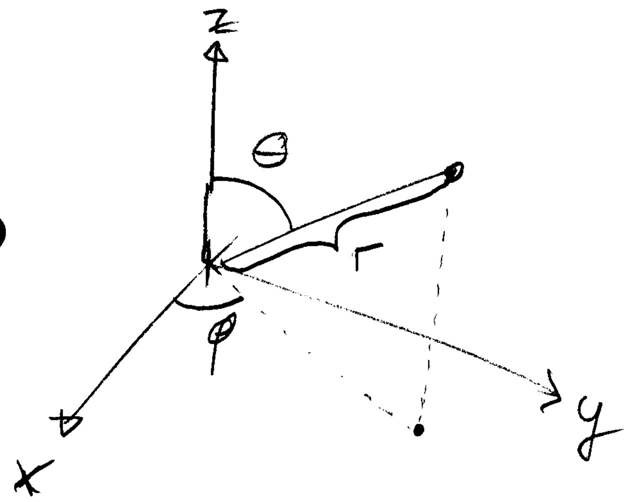
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$$

Har $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$ osv

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ osv.

(Ortonormal basis)

Kan beskrives ekvivalent med kulekoordinater: (r, θ, ϕ).



$$\vec{r} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \phi\vec{e}_\phi$$

Også ortonormal basis:

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ osv

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$ osv.

Relasjon:

$x = r\cos\phi\sin\theta$

$y = r\sin\phi\sin\theta$

$z = r\cos\theta$

$\boxed{\text{Si}}$ (Men enhetsvektorene kan nå ha forskjellige enheter, og de kan deriveres!)

Derivasjon av felter

Vi kan partiellderivere skalar-felter:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

Si (Vanlig derivasjon ~~vi bo~~ tenk på y og z som konstant)

- Dermed kan vi også partiell-derivere komponenter av vektor-felter:

$$\frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial y}$$

- -Gradient:

Gradienten til et skalarfelt er vektoren av de partiell-deriverte:

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

Så gradientoperasjonen tar inn et skalar-felt og gir ut et vektorfelt.

∇ kalles del- eller nablaoperatoren og kan skrives

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Eks:

$$f(x,y,z) = x + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f = \vec{e}_x \cdot 1 + \vec{e}_y \cdot 0 + \vec{e}_z \cdot 1$$

$$= \vec{e}_x + \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eks:

$$h(x,y,z) = x^2 + yz.$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = y$$

$$\Rightarrow \nabla h(x,y,z) = x^2\vec{e}_x + z\vec{e}_y + y\vec{e}_z.$$

Vektorfelter som er gradienten til et skalarfelt kalles <u>konservative</u> felter.

Vi skal se seinere at i konservative felter er linje-integral rundt lukka kurver alltid null.

Fysisk sett så har et konservativt kraftfelt den egenskapen at de bevarer mekanisk energi.

Konservative felter har også alltid <u>null virvling</u>. [La oss sjekke når vi definerer virvling]

Divergens

Vi kan ikke ta gradienten av et vektorfelt. (Det ville blitt en matrise!)

Men vi kan ta prikkproduktet med ∇:

- $\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z)$

$$= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(v_x(x,y,z)\vec{e}_x + v_y(x,y,z)\vec{e}_y + v_z(x,y,z)\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Kalles divergensen til $\vec{v}$.

Divergens tar inn et <u>vektorfelt</u> og gir ut <u>skalarfelt</u>.

<u>Eks:</u> $\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + ze_z$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = y + 2y + 1 = \underline{\underline{3y+1}}$$

Virvling

Alternativt kan vi ta **kryss-produktet** mellom ∇ og $\vec{v}$:

- $$\boxed{\nabla \times \vec{v}(x,y,z).} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Dette er virvlinga til $\vec{v}$.

Tar inn vektor, gir ut ny vektor.

- **Eks** Sjekk fra i stad:

$$\vec{w} = \nabla h = x^2\vec{e}_x + z\vec{e}_y + y\vec{e}_z .$$

$$\nabla \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z & y \end{vmatrix} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix}$$

$$-\vec{e}_y \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 & z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x\left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}\right) - \vec{e}_y\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right)$$

$$+ \vec{e}_z\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right)$$

$$= \underline{\underline{\vec{0}}}$$

Integrasjon av felter

Felter er i bunn og grunn funksjoner, så vi burde kunne integrere dem. Men som med derivasjon fins det flere måter å gjøre det på.

Linjeintegral / kurveintegral

Integralet av et vektorfelt langs en kurve

Tar inn et vektorfelt og gir ut et tall:

$$\boxed{I = \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

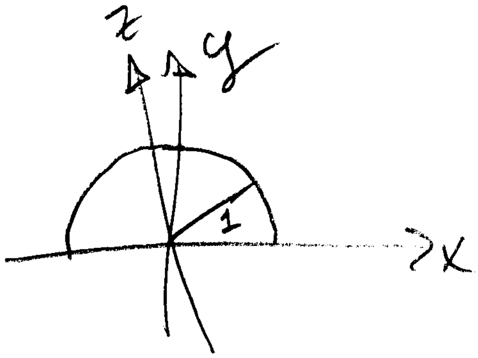
- Γ er en kurve som vi integrerer langs og $d\vec{r}$ er en infinitesimal retningsvektor langs Γ.

Hvordan det virker illustreres

- best med et eksempel:

La $\vec{v}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$.

La Γ være den øvre enhets-halvsirkelen i xy-planet: (ved $z=0$)



Oppskrift:

(1) Parametrisér Γ som en vektor $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, \pi].$$
$$= (x(t), y(t), z(t))$$

(2) Sett inn i $\vec{v}(x, y, z)$:

$$\vec{v}(x(t), y(t), z(t)) = \sin t\, \vec{e}_y - \cos t\, \vec{e}_x.$$

$$= \vec{v}(t).$$

(3) Skriv om med kjerneregelen:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

og regn ut $\frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0).$$

(4) Sett inn og regn ut:

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt$$

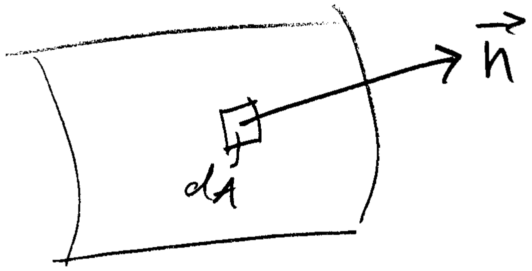
$$= -\int_0^{\pi} dt = \underline{\underline{-\pi}}$$

Fluksintegral

Integralet av et <u>vektorfelt</u> gjennom en flate.

$$\Phi = \int_A \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

- A symboliserer en flate, f.eks. et kuleskall, $d\vec{A}$ er en differensiell normal-vektor til flata.
- Det er lurt å skrive $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$.



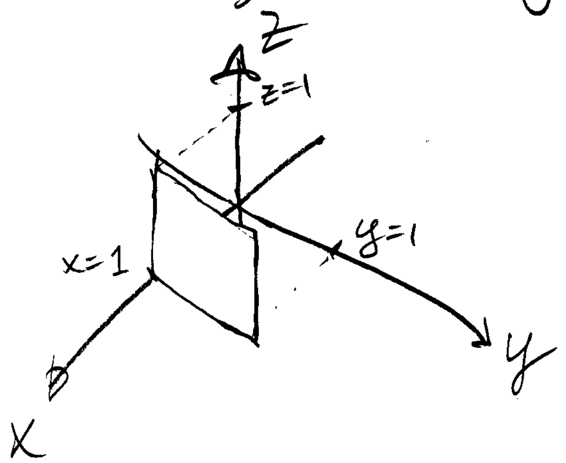
$(|\vec{n}| = 1)$.

Eks

La $\vec{v} = (y+x)\vec{e}_x + x\vec{e}_z$.

Vil regne ut fluksen gjennom veggen gitt ved

$x=1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$



Setter opp:

$$\Phi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

Ser at $dA = dy\,dz$.

og at $\vec{n} = \vec{e}_x$.

Def gir at

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = y + x.$$

Grenser: $x = 1$ konst.

$$0 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq 1$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^1 \int_0^1 (y + \underbrace{\cancel{x}}_{1})\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} y^2 + y\right]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} dz = \frac{3}{2} \left[z\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Eks 2:

Kulekoordinater!

La $\vec{v}(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\,\vec{e}_r$.

Peker rett ut over alt, men er null rett opp/ned og mals rett til sida.

La A være enhetskula med radius 2:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \theta \in [0,\pi] \\ \phi \in [0,2\pi) \end{array} \right\}$$

$$\Phi = \oint_A \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

lukka flate

Ser at $\vec{n} = \vec{e}_r$.

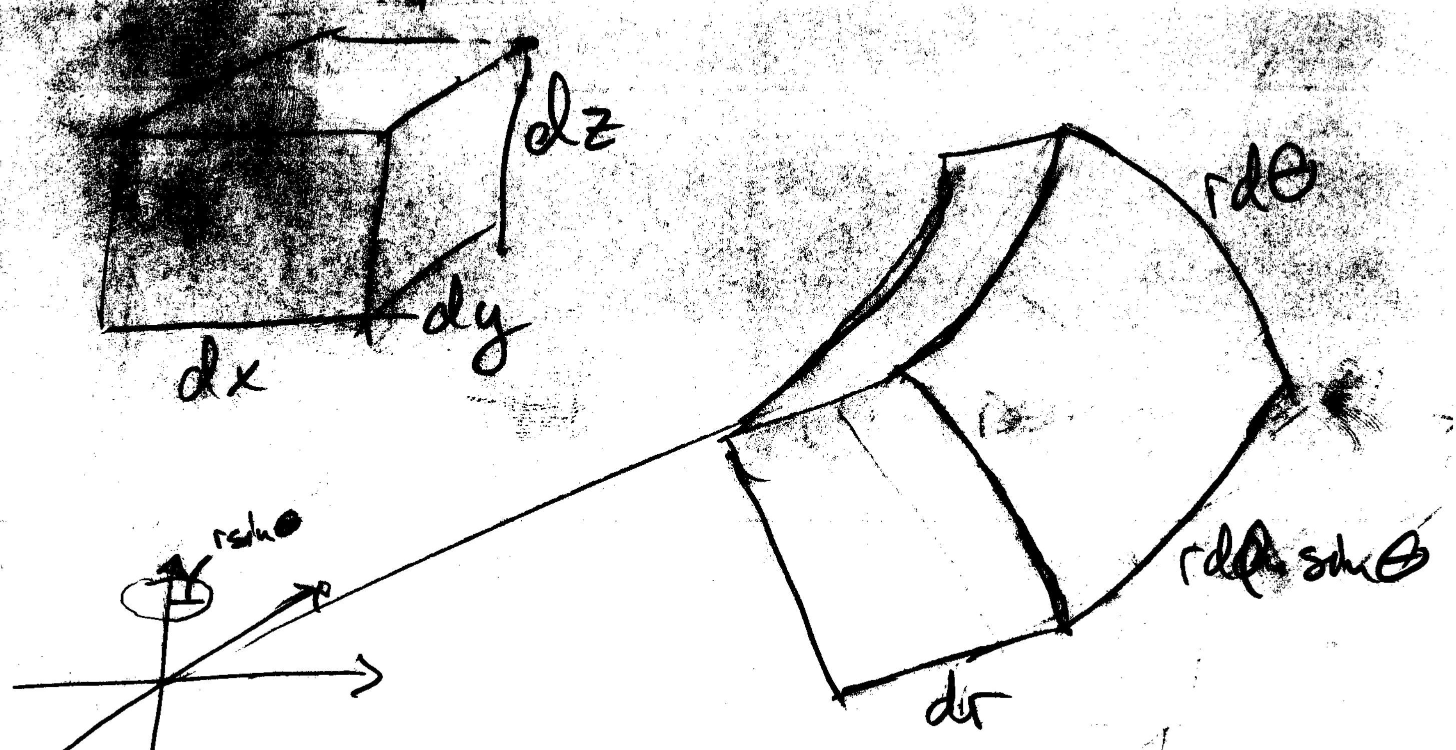
$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = r \sin\theta \, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$$

$$= r \sin\theta$$

Hva er dA? Må være noe med $d\theta$ og $d\phi$, men: for kulekoordinater: Jacobideterminant

Faktorer som kombinerer differensialelementene

Koordinat	θ	ϕ	r
Arealelement	$r\,d\theta$	$r \sin\theta \, d\phi$	dr



Vi får

$$dA = rd\theta \cdot r\sin\theta d\phi = r^2\sin\theta d\theta d\phi.$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overbrace{\underbrace{r}_{\to 2}\sin\theta}^{\vec{v}\cdot\vec{A}} \; \overbrace{\underbrace{r^2}_{\to 4}\sin\theta}^{\text{jacobi}} \, d\theta d\phi$$

$$= 8\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta$$

$$= 8 \cdot \left[\phi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{8\pi^2}}$$

Volumintegral

Integralet av et skalarfelt over en del av rommet. (3D). Gir ut et tall.

For eksempel: Tetthet ρ $[kg/m3]$ → masse

$$m = \iiint \rho \, dV \quad [kg].$$

egentlig trippelintegral

inneholder 3 koordinater (+jacobi)

Eks: Kartesiske koordinater

$$\rho(x,y,z) = \frac{5xy^2}{z}.$$

Integrer over boksen gitt av

$$\begin{Bmatrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \\ 3 \le z \le 4 \end{Bmatrix}.$$

$$dV = dx\,dy\,dz.$$

$$I = \int_3^4 \int_0^1 \int_0^2 \frac{5xy^2}{z} \, dx\,dy\,dz$$

$$= 5 \int_3^4 \int_0^1 \frac{y^2}{z} \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2}_{\frac{1}{2}\cdot 4 = 2} dy\,dz$$

$$= 5 \cdot 2 \int_3^4 \frac{1}{z} \underbrace{\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1}_{\frac{1}{3}} dz$$

$$= \frac{10}{3} \left[\ln z\right]_3^4$$

$$= \frac{10}{3}(\ln 4 - \ln 3).$$

Eks: Kulekoordinater

Tar kule i origo med radius 3. La

$$\rho(r,\theta,\phi) = 3K + \frac{2\cos\theta}{r}.$$

Vil finne $I = \int\limits_{\text{inni kula}} \rho \, dV$

Grenser: $\begin{cases} r \in [0,3] \\ \theta \in [0,\pi] \\ \phi \in [0,2\pi] \end{cases}$

$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ (hele greia)

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} \left(3K + \frac{2\cos\theta}{r}\right) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Tar hvert ledd for seg:

$$3K \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi = 3K \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^3$$

$$= 108\pi.$$

$$2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} r\cos\theta\sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2 \cdot \int_0^{3} r\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\right) \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi} = \underline{0}.$$

$$\Rightarrow I = \underline{\underline{108\pi}}$$

Stokes' teorem

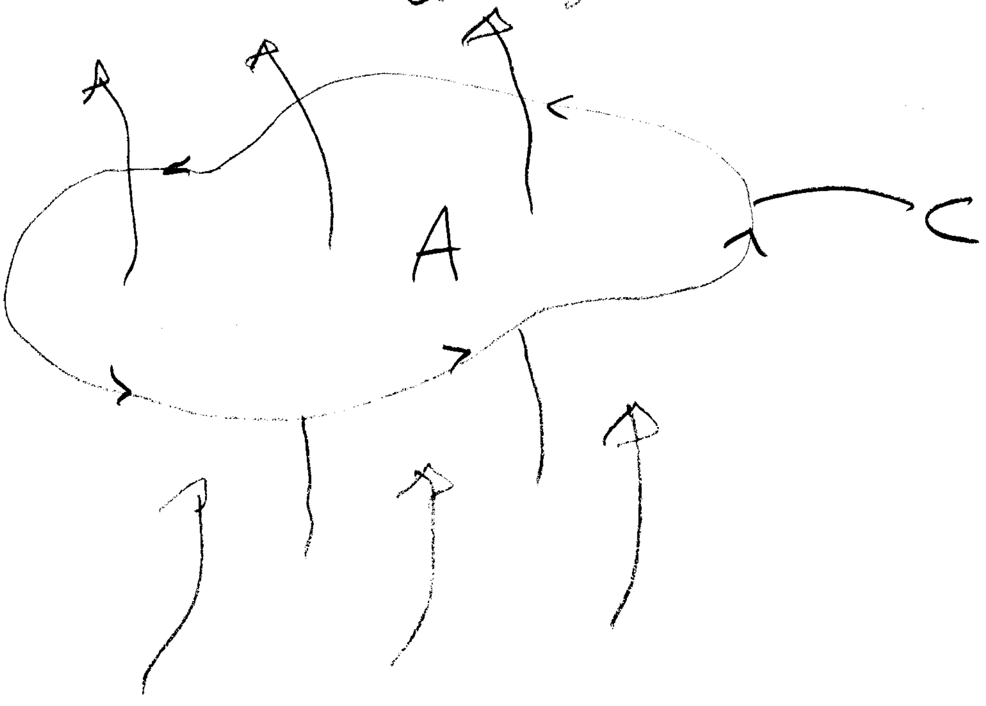
Relaterer linjeintegral med fluksintegral via virvling.

$$\iint_A (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$$

A er en flate

C er kurva som omslutter kanten til A.

(Noen liker å skrive $C=\partial A$).



Eks: La oss sjekke begge sider og se om vi får samme svar.

La $\vec{v}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$.

La Γ være hele enhetssirkelen. Vet da fra sist at

$\vec{r} = (\cos t, \sin t, 0)$, men $t \in [0, 2\pi]$

nå siden vi skal rundt hele sirkelen. Vi får det samme integralet som sist:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Stokes' teorem sier at vi skal få samme svar hvis vi regner ut

$$\iint_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}$$ der A er enhetsskiva.

- Regner først ut $\nabla \times \vec{v}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z\left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) = -2\vec{e}_z$$

- Enhetsnormalvektor $\vec{n} = \vec{e}_z$.

$$\Rightarrow \quad (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} = -2.$$

Trenger bare A og dA.
Ser at $A = \left\{ \begin{matrix} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ \theta = \pi/2 \end{matrix} \right\}$

Det gir fra Jacobitabellen

at $dA = dr \cdot r\sin\theta \, d\phi$

$= r\,dr\,d\phi.$

$$\Rightarrow \iint (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2)\, r\,dr\,d\phi$$

$$= -2 \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 r\,dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Gauss' teorem:

Relaterer fluksintegral med volumintegral via divergens.

NB! Må ikke forveksles med Gauss' lov!

$$\oint\!\!\!\oint_A \vec{v}\cdot d\vec{A} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{v})\, dV$$

A = lukka flate

V = volumet omslutta av A

(Noen liker å skrive $A = \partial V$).

Eks: $\vec{v}(r,\theta,\phi) = Kr\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta$.

Finn fluksen av $\vec{v}$ ut av kula med radius 3 og sentrum i origo.

$$F = \oiint_A \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

Regner direkte først:

Har $\vec{n} = \vec{e}_r$.

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = Kr.$$

$$dA = r\, d\theta \cdot r \sin\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi.$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K \cancel{r \cdot r^2} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$3^3 = 27.$

$$= 27K \cdot 4\pi = \underline{\underline{108\pi}}.$$

Så vil vi sjekke med Gauss' teorem:

$$F \stackrel{?}{=} \iiint (\nabla \cdot \vec{v})\, dV$$

Trenger $\nabla \cdot \vec{v}$ i kulekoordinater!

Rottmann: $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right).$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Kr^3\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{3Kr^2}{r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r\sin\theta} = 3K + \frac{2\cos\theta}{r}.$$