

## FYS 1120: Labøvelse 2 – Magnetisering

I denne øvelsen skal vi undersøke om vismut er en dia- eller paramagnetisk material. I slike materialer blir magnetiseringen  $\vec{M}$  en lineær funksjon av den magnetiske feltstyrken  $\vec{H}$ , dvs.  $\vec{M} = \chi\vec{H}$ , der proporsjonalitetskonstanten  $\chi$  er materialets magnetiske susceptibilitet. Diamagnetiske materialer har  $\chi < 0$ , paramagnetiske har  $\chi > 0$ .

Vi skal også, vha. en såkalt "Rowland-ring" studere et ferromagnetisk material. I slike materialer gjelder fremdeles  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , men sammenhengen mellom  $\vec{M}$  og  $\vec{H}$  er ikke lineær og i tillegg er magnetisering en ikke helt reversibel prosess, dvs. at magnetiseringen avhenger også av den magnetiske historien til materialet. Denne historieavhengigheten kalles hysteres. At  $\vec{M}$  kan være stor i fravær av påtrykt felt ( $\vec{H} = 0$ ) skiller ferromagnetismen fra para- og diamagnetismen.

### 1. Måling av magnetisk susceptibilitet

Apparaturen er skissert i figur 1. Prøven (her vismut) som skal undersøkes er utformet som en langstrakt sylindrisk stav. Denne henges i det inhomogene feltet mellom polene til en elektromagnet. Kraften som virker på prøven måles ved hjelp av en balansevekt.

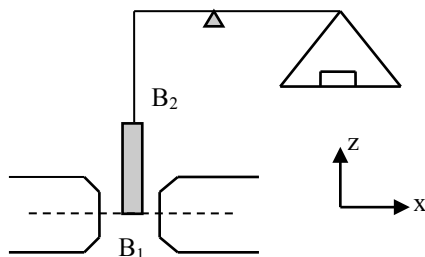


Fig.1. Apparat for måling av magnetisk susceptibilitet

Vi orienterer koordinatsystemet som vist i figur 1. La prøven ha et tverrsnitt  $A$  og susceptibilitet  $\chi$ . Hvis vi ser bort fra luftens susceptibilitet, er den magnetiske kraften  $F_z$  som virker på prøven i  $z$ -retningen

$$F_z = -\frac{1}{2\mu_0}\chi A(B_1^2 - B_2^2).$$

For å bringe staven tilbake til høyden den hadde med B-feltet slått av, må balansevekten justeres for å gi en opphevende kraft  $\Delta mg$ . Flukstettheten ( $x$ -komponenten) ved stavens nedre ende er  $B_1$  og ved den øvre

enden  $B_2$  (staven er lang nok til at  $B_2^2 \ll B_1^2$  er en veldig god approksimasjon).

**PRELAB-Oppgave 1: Hva er forholdet mellom fortegnene på  $\chi$  og  $F_z$ , dvs. er det diamagnet eller paramagnet som vil skyves ut av B-feltet?**

**Oppgave 1: Bestem susceptibiliteten til vismut. Er vismut para- eller diamagnetisk? Begrunn svaret.**

### 2. Måling av magnetisk fluks

Faradays induksjonslov sier at dersom den magnetiske fluksen  $\Phi$  gjennom en flate endres, så vil det i en strømkrets som ligger rundt flaten oppstå en elektromotorisk spenning  $V_E$  gitt ved

$$V_E = -\frac{d\Phi}{dt},$$

slik at

$$V_E dt = -d\Phi$$

eller

$$\int_{t_1}^{t_2} V_E dt = -\int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (1)$$

Endringen i fluksen fra tiden  $t_1$  til tiden  $t_2$  er altså lik tidsintegralet av den induerte spenningen i tiden fra  $t_1$  til  $t_2$ . Tidsintegralet bestemmes ved hjelp av en elektronisk spenningsintegrator. En spenningsintegrator gjør akkurat det som navnet sier – den integrerer en spenning (mht. tid), mao. den utfører venstre siden av formel (1) elektronisk.

Integratoren gir et totalutslag  $\alpha$  som er proporsjonalt med tidsintegralet av spenningen  $V$  over inngangskontaktene. Følsomheten kan varieres med dempningsfaktoren  $D$ . Totalutslaget  $\alpha$  er produktet av dempningsfaktoren  $D$  og skalaavlesningen  $S$ , det vi faktisk leser av på integratoren. Vi har da at

$$\int_{t_1}^{t_2} V dt = k\alpha = kDS,$$

der er  $k$  en konstant som er karakteristisk for hvert instrument og må bestemmes ved en spesiell kalibrering (se det følgende). Verdien av  $D$  innstilles med en reguleringsknott, og  $S$  leses av på skalaen. Produktet av de tre størrelsene  $k$ ,  $D$  og  $S$  gir oss fluksforandringen gjennom den flaten som omslutes av den ledningen som er tilkopleet integratorens inngangskontakter.

Integratoren har digital skala. Den kan nullstilles ved å trykke på "Reset"-knappen. Skalaen viser positive og negative verdier etter hvilken polaritet vi har på inngangsspenningen. På grunn av støy og termisk

ubalanse vil integratoren vanligvis ha en viss nullpunktsdrift, slik at den gir et visst utslag selv om spenningen er null. Nullpunktsdriften kan reduseres ved å regulere "0-just"-kontrollen slik at skala-avlesningen ikke endrer seg med tiden når inngangen er kortsluttet (det må være ledende forbindelse mellom inngangskontaktene når driften justeres). For å redusere virkningen av nullpunktsdriften bør man gjøre målinger med utslag i begge retninger. Integratoren bør ikke slås av før hele eksperimentet er ferdig og den bør ikke stå for lenge uten ledende forbindelse mellom inngangskontaktene. Nullpunktsdriften bør kontrolleres fra tid til annen.

Før integratoren kan brukes til målinger må vi kalibrere den ved å bestemme verdien av konstanten  $k$ . Dette gjøres ved å legge en konstant, kjent spenning  $V_0$  over inngangskontaktene og måle tiden  $t_0$  det tar å få et totalutslag  $\alpha = DS$ . Tidsintegralet er da  $V_0 t_0$  og  $k$  kan bestemmes av likningen  $kDS = V_0 t_0$ .

**NB! Kontroller at  $V_0 < 10$  mV (ellers går en sikring i integratoren).** Koplingsskjema er gitt i figur 2.

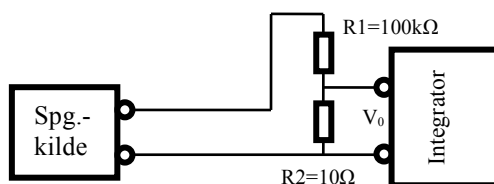


Fig. 2: Koplingsskjema for kalibrering av spenningsintegrator

Ved å bytte om kablene koblet til spenningskilden kan vi snu polariteten og utføre målinger med utslag i begge retninger. Spenningsdeleren består av motstandene  $R_1 = 100$  kΩ og  $R_2 = 10$  Ω. Kalibreringskonstanten  $k$  måles i Vs eller Wb (weber), som er enheten for magnetisk fluks.

**Oppgave 2.1: Bestem spenningsintegratorens kalibreringskonstant  $k$ .**

**Oppgave 2.2: Benytt så en liten spole til å måle flukstettheten  $B$  mellom en permanent magnets poler (veilederne kjenner den nominelle verdien til  $B$ ). Spolen kobles til spenningsintegratoren – dette sammensatte instrumentet kalles for et (magnetisk) fluksmeter. Integratoren nullstilles mens spolen holdes mellom polene. Så fjernes spolen fra magnetfeltet. Flukstettheten beregnes ved hjelp av formelen**

$$B = \frac{kDS}{NA},$$

der  $S$  er fluksmeterutslaget og  $NA$  er produktet av spolens areal og vindingstall.

**PRELAB-Oppgave 2: Vis at  $B = \frac{kDS}{NA}$  ut ifra likning (1).**

### 3. Måling av magnetisk hysteresese

Den irreversible, ikke-lineære sammenhengen mellom den magnetiske feltstyrken  $H$  og den magnetiske flukstettheten  $B$  inne i et magnetisk materiale bestemmes på enkleste måte ved hjelp av en såkalt Rowland-ring. Det ferromagnetiske materialet som skal undersøkes er utformet som en ring med midlere radius  $R$  og tykkelse  $2r$ . En isolert koppertråd er viklet jevnt rundt ringen. Denne viklingen kalles primærspolen. Den magnetiske feltstyrken langs ringens akse er gitt ved

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

der  $I$  er strømmen i primærspolen og  $N$  er antall viklinger. Hvis  $r \ll R$ , er  $H$  tilnærmet konstant inne i ringen.

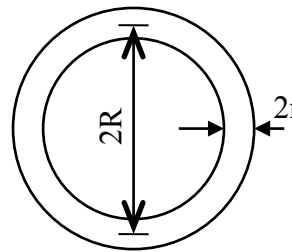


Fig. 3. Rowland-ring

Den magnetiske flukstettheten  $B = \mu_0(H + M)$  bestemmes ved hjelp av en sekundærspole som bør ligge innenfor primærspolen. Sekundærspolen kobles til en spenningsintegrator.

En apparatur som kan benyttes til registrering av hysteresekurver er vist i Fig. 4. Vi bruker dataprogrammet **Capstone** (dobbel-klikk på "Hysteresese"-ikonet på datamaskinens desktop) for å registrere datapunkter og tegne hysteresesløyferne.

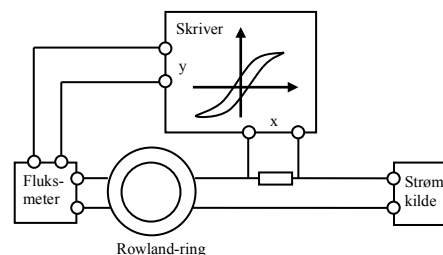


Fig. 4. Apparat for registrering av hysteresekurver

Primærstrømmen passerer en liten motstand. Spenningen over motstanden styrer "skriverens" bevegelse i  $x$ -retningen. Den spenning som induseres i sekundærspolen integreres i fluksmeteret. Fra dette går et signal til "skriverens"  $y$ -inngang. Når primærstrømmen varieres, vil dataprogrammet tegne en kurve slik at

$$x \propto I \propto H$$

og

$$y \propto \int \epsilon dt = \int d\Phi = \Delta\Phi \propto \Delta B$$

Enhetene på aksene kan bestemmes når følgende størrelser er kjent:

- Primærstrømmens maksimalverdi
- Spolens vindingstall ( $N$  og  $n$ )
- Rowland-ringens dimensjoner ( $R$  og  $r$ )
- Fluksmeterets kalibreringskonstant  $k$  og dempningsfaktor  $D$
- Fluksmeterensignalene  $S_1$  og  $S_2$  som svarer til verdierne  $+I_m$  og  $-I_m$  for primærstrømmen.

**Hysterese** er satt opp slik at  $x$ -aksen er i ampere og  $y$ -aksen er lik  $S$ .

Vi får

$$H_{maks} = \frac{NI_{maks}}{2\pi R}$$

og

$$B_{maks} = \frac{kD|S_1 - S_2|}{2nA},$$

der  $n$  er sekundærspolens vindingstall og der  $A = \pi r^2$  er ringens tverrsnitt.

Opptegning av hysteresekurver foregår slik:

- Strømmen varieres jevnt fra 0 til  $I_{maks}$
- Strømmen varieres jevnt fra  $I_{maks}$  til 0
- Strømmen varieres jevnt fra 0 til  $-I_{maks}$
- Strømmen varieres jevnt fra  $-I_m$  til 0

**Materialet bør sendes gjennom hysteresesløyfen flere ganger før kurven registreres på millimeterpapir.**

**PRELAB-Oppgave 3: Hva blir stigningstallet  $dB/dH$  der  $M$  blir konstant for høye verdier av  $H$ ? Hvis tangenten til  $B$  vs.  $H$  for høye verdier av  $H$  er linjen  $B = B_0 + \mu_0 H$ , hva er den maksimale verdien av  $M$ ?**

**Oppgave 3.1: Benytt en Rowland-ring. Lag et sett hysteresekurver med primærstrømmer 0,5, 1, 2, 3, og 4. Lag en graf av  $M$  versus  $H$  (den "normale magnetiseringskurven") for de 5 punktene ( $H_{maks}$ ,  $B_{maks}$ ).**

**Oppgave 3.2: Benytt hysteresekurven for 4 A og bestem den remanent induksjonen  $B_r$  for jernringen (dvs.  $B$  for  $H = 0$ ). Kunne  $B_r$  økes betydelig om vi brukte større  $I_{maks}$ ? Begrunn svaret (kvalitativt).**

## Vedlegg:<sup>1</sup> Magnetisk kraft

Den magnetiske kraften på et strømelement  $I d\mathbf{l}$  er gitt av

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Når vi skal regne ut den magnetiske kraften på en stav, kan vi bruke (1), men vi må da også ta med alle *bundne* strømelementer, både i volumet og på overflaten til staven. Dette kan fort bli arbeidsomt, og det kan ofte være enklere å gå veien via lagret energi  $W_m$  og en liten virtuell forskyving av staven. Kraften er da gitt av  $\mathbf{F} = -\nabla W_m$  i tilfellet der vi har et tapsfritt system uten kilder, og  $\mathbf{F} = +\nabla W_m$  når strømmene holdes konstant.

For oppsettet i laboppgaven, bruker vi imidlertid metoden basert på (1). Den bundne strømmen kan finnes både inne i staven (som en strømtetthet  $\mathbf{J}_b$ ), og på overflaten til staven (som en flatestrømtetthet  $\mathbf{J}_{b,s}$ ). Fra ligning (3.104) og (3.105) i kompendiet har vi at

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (2)$$

og

$$\mathbf{J}_{b,s} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (3)$$

der  $\mathbf{M}$  er magnetiseringstettheten, og  $\hat{\mathbf{n}}$  er en enhets-normalvektor ut av stavens overflate.

Vi finner total kraft på staven ved å bytte ut  $I d\mathbf{l}$  i (1) med henholdsvis  $\mathbf{J}_b dv$  (og integrere over volumet), og  $\mathbf{J}_{b,s} dS$  (og integrere over overflaten):

$$\mathbf{F} = \int_{\text{stav}} \mathbf{J}_b \times \mathbf{B} dv + \int_{\text{stavens overflate}} \mathbf{J}_{b,s} \times \mathbf{B} dS. \quad (4)$$

Uttrykt med magnetiseringen blir dette

$$\mathbf{F} = \int_{\text{stav}} (\nabla \times \mathbf{M}) \times \mathbf{B} dv + \int_{\text{stavens overflate}} (\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \mathbf{B} dS. \quad (5)$$

Vi antar at mediet i staven er lineært, isotropt og homogent, og beskrives av en magnetisk susceptibilitet  $\chi$ . Vi har

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\chi}{(1 + \chi)\mu_0} \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \quad (6)$$

der vi for enkelhets skyld har definert

$$\alpha = \frac{\chi}{(1 + \chi)\mu_0}. \quad (7)$$

---

<sup>1</sup>J. Skaar, H17

Innsatt i (5) får vi

$$\mathbf{F} = \alpha \int_{\text{stav}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} dv + \alpha \int_{\text{stavens overflate}} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \mathbf{B} dS. \quad (8)$$

Denne sammenhengen kan vi bruke til å regne ut kraften på staven når vi kjenner  $\mathbf{B}$ -feltet.

Vi ser på en tynn, sylindrisk stav. Staven antas å være så lang at vi kan neglisjere  $\mathbf{B}$  på toppen av sylindren (se figuren). Pga. symmetri vil  $\mathbf{B}$ -feltet i staven være tilnærmet i  $\hat{\mathbf{x}}$ -retning. Videre vil feltet være tilnærmet uavhengig av  $x$  og  $y$ . Fra symmetri vil kreftene på den runde delen av sylinderflaten nulle hverandre ut, så i overflateintegralet kan vi nøye oss med å ta med bunnen av sylindren:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \alpha \int_{\text{stav}} \frac{dB}{dz} \hat{\mathbf{y}} \times B \hat{\mathbf{x}} dv + \alpha \int_{\text{bunn}} (B \hat{\mathbf{x}} \times (-\hat{\mathbf{z}})) \times B \hat{\mathbf{x}} dS. \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \alpha \int_{\text{stav}} B \frac{dB}{dz} dv - \hat{\mathbf{z}} \alpha \int_{\text{bunn}} B^2 dS \\ &= -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \alpha \int_{\text{stav}} \frac{d(B^2)}{dz} dv - \hat{\mathbf{z}} \alpha \int_{\text{bunn}} B^2 dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Siden  $B$  er uavhengig av  $x$  og  $y$  får vi da

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \alpha A \int_0^l \frac{d(B^2)}{dz} dz - \hat{\mathbf{z}} \alpha AB_1^2, \quad (10)$$

der  $l$  er lengden til staven,  $A$  er arealet til sylindrens bunn og  $B_1$  er feltet i bunnen. Øverst på staven er feltet neglisjerbart, så vi får

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \alpha AB_1^2 - \hat{\mathbf{z}} \alpha AB_1^2 = -\frac{1}{2} \alpha AB_1^2 \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\chi}{2\mu_0(1+\chi)} AB_1^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (11)$$

For paramagnetiske eller diamagnetiske medier med  $|\chi| \ll 1$  forenkles dette til

$$\mathbf{F} \approx -\frac{\chi}{2\mu_0} AB_1^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (12)$$