LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN FYS1120 H-09

Oppgave 1

To elektriske ladninger, $Q_1 = 0.4\,\mu\text{C}$ og $Q_2 = 1.6\,\mu\text{C}$ befinner seg på x-aksen i henholdsvis $x = 0.4\,\text{cm}$ og $x = 15.0\,\text{cm}$.

a) Skissér de elektriske feltlinjene omkring disse to ladningene.

b) Vis at feltet er null i et punkt P på x-aksen og finn avstanden til dette punktet fra origo:
$Q_1/(x-0.4)^2 = Q_2/(15.0-x)^2$ som gir $x = 0.4 + 14.6/(1+\sqrt{Q_2/Q_1}) = 5.27\,\text{cm}$.

c) En ladning $Q_3 = 2.0\,\mu\text{C}$ bringes inn til punktet P fra det uendelige. Hvor stort arbeid (målt i J) må da utføres?
$W = (Q_3/4\pi\varepsilon_0)[Q_1/(x-0.4) + Q_2/(15.0-x)] = 0.46\,\text{J}$.

Oppgave 2

En rett ledning med lengde L fører en elektrisk strøm I. Den går på tvers av et magnetfelt B.

a) Forklar hvordan man kan vise at kraften på ledningen er gitt som $F = ILB$:
$d\mathbf{F} = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ som etter integrasjon gir total kraft $\mathbf{F} = I(\boldsymbol{\ell}_f - \boldsymbol{\ell}_i) \times \mathbf{B}$ hvor vektor $\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_f - \boldsymbol{\ell}_i$ som forbinder ledningens endepunkt står normalt på $\mathbf{B}$.

b) En lengre ledning med samme strøm blir bøyd til som i Fig.1. Den ligger i et plan og magnetfeltet står normalt på planet. Beregn nå kraften på hele ledningen ved å integrere bidragene fra hver del. Har du regnet riktig, blir svaret $F = 4ILB$:
Hvis vi legger x-aksen gjennom endepunktene og y-aksen normalt på denne (og $\mathbf{B}$-feltet), vil bidragene til kraften fra halvsirkelbuen i x-retning kansellere hverandre utifra symmetry. For y-komponenten finner vi $F_y = ILB\int_0^\pi d\theta \sin\theta = 2ILB$. Da bidragene fra de de rette delene til høyre og venstre er $2ILB$, finner vi tilsammen $4ILB$.

c) Hvordan kunne du ha funnet dette enkle svaret mer direkte?
For hele ledningen er $\boldsymbol{\ell}_f - \boldsymbol{\ell}_i = 4L\mathbf{e}_x$. Dermed følger svaret direkte fra spørsmål a).

Oppgave 3

En elektrisk krets som vist i Fig.2 inneholder to spenningskilder som er henholdsvis $\mathcal{E}_1 = 12.0\,\text{V}$ og $\mathcal{E}_2 = 2.0\,\text{V}$ samt tre motstander, alle av samme størrelse $R = 2.0\,\Omega$.

a) Bruk Kirchhoff's lover til å beregne de tre strømmene I_1, I_2 og I_3 angitt på figuren: Kirchhoffs første lov gir med en gang $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ i de to kontaktpunktene hvor tre ledninger møtes. I venstre loop hvor vi går rundt med klokka, gir nå Kirchoffs andre lov at $\mathcal{E}_1 - I_1 R - \mathcal{E}_2 + I_2 R = 0$. På tilsvarende måte for høyre loop i samme retning følger at $\mathcal{E}_2 + I_3 R - I_2 R = 0$. Bruker vi nå at $I_2 = -(I_1 + I_3)$, kan vi fra første relasjon finne I_3 uttrykt ved I_1. Innsatt i den andre finner vi da for $I_1 = (2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/3R = (11/3)\,\mathrm{A}$. Det betyr at $I_3 = -(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/3R = -(7/3)\,\mathrm{A}$. Dermed er også $I_2 = -(4/3)\,\mathrm{A}$. Både I_2 og I_3 har derfor retninger motsatt av hva som som antatt i tegningen.

b) Beregn effekten (målt i W) som den kraftigste spenningskilden $\mathcal{E}_1$ produserer:
$P = \mathcal{E}_1 I_1 = 44.0\,\mathrm{W}$.

c) Sammenlign denne med effekt-tapet i de tre motstandene og forklar hvorfor disse to effektene ikke er like store:
$P' = RI_1^2 + RI_2^2 + RI_3^2 = 41.4\,\mathrm{W}$. Resten av effekten fra batteri $\mathcal{E}_1$ går med til å lade opp batteri $\mathcal{E}_2$.

Oppgave 4

En rett koaxialkabel består av en kompakt, sylindrisk kjerne med radius $a = 1.2\,\mathrm{mm}$ og som fører en uniformt fordelt strøm $I = 2.7\,\mathrm{A}$. Den er omgitt av en kosentrisk, ledende kappe med indre radius $b = 3.5\,\mathrm{mm}$.

a) Beregn magnetfeltet B i den sentrale lederen i avstand $r < a$ fra sentrum av kabelen: Strømtettheten i den sentrale lederen er $J = I/\pi a^2$. Bruk av Ampères lov gir da for en sirkel med radius r som vi integrerer rundt, $2\pi r B = \mu_0 J \pi r^2$ eller $B = (\mu_0 I/2\pi a)(r/a)$ hvor $(\mu_0 I/2\pi a) = 0.45\,\mathrm{mT}$.

b) Gjenta beregningen av magnetfeltet i det åpne mellomrommet $a < r < b$ og vis at du får samme svar som i forrige spørsmål for $r = a$:
På samme måte som i forrige spørsmål blir her $B = (\mu_0 I/2\pi a)(a/r)$.

c) Beregn herav den totale magnetiske feltenergi (målt i J) i dette mellomrommet når kabelen har en lengde på $L = 10\,\mathrm{m}$:
Energitettheten blir $u_B = B^2/2\mu_0 = \mu_0 I^2/8\pi^2 r^2$. Ved integrasjon over det sylindriske volumet mellom $r = a$ og $r = b$ gir dette total energi $U = (\mu_0 I^2 L/8\pi^2) \cdot \int_a^b dr 2\pi r/r^2 = (\mu_0 I^2 L/4\pi)\ln(b/a) = 7.8\,\mu\mathrm{J}$.

- -