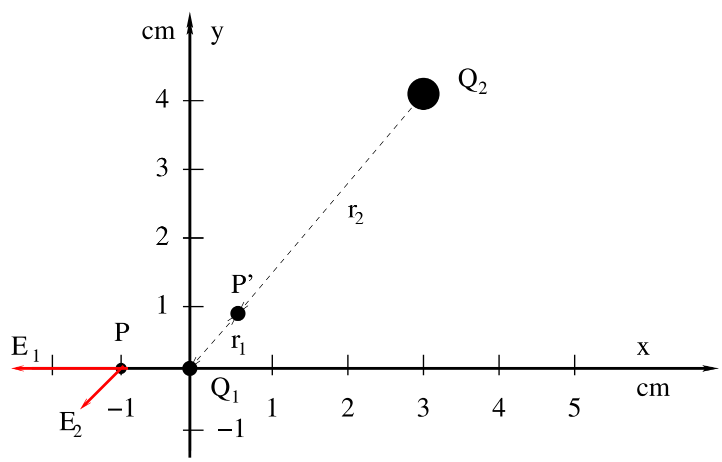
FYS1120 H-2011: Løsningsforslag for midtveiseksamen

Oppgave 1
To elektriske punktladninger er plassert i xy-planet som vist i figuren. Ladningen $Q_1 = 0.2\,\mathrm{nC}$ er plassert i origo, mens ladningen $Q_2 = 3.2\,\mathrm{nC}$ befinner seg i punktet med koordinater (3.0, 4.0) målt i enheter av cm.

1a) Beregn størrelsen av det elektriske feltet i punktet P vist i figuren. Det ligger på



den negative x-aksen 1.0 cm fra origo. Bruk her verdien $1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ for permittivitetskonstanten i vakuum.

Feltvektorene $\mathbf{E}_1$ fra ladning Q_1 og $\mathbf{E}_2$ fra ladning Q_2 er tegnet inn i figuren og har størrelsene

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_P^2} = 9.0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{0.2\,\mathrm{nC}}{(0.01)^2\mathrm{m^2}} = 1.8 \times 10^4\,\mathrm{N/C}$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0[(x_P - x_2)^2 + y_2^2]} = 9.0 \times 10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\frac{3.2\,\mathrm{nC}}{(4^2 + 4^2) \times 10^{-4}\mathrm{m^2}} = 0.9 \times 10^4\,\mathrm{N/C}.$$

Den totale komponenten langs x-aksen er gitt ved summen $E_x = E_{1x} + E_{2x} = -(1.8 + 0.9/\sqrt{2}) \times 10^4\ N/C = -(1.8 + 0.64) \times 10^4\ N/C = -2.44 \times 10^4\ N/C$. På samme måte får den totale komponenten i y-retning bare et bidrag fra E_2, i.e. $E_y = E_{2y} = -0.9/\sqrt{2} \times 10^4\ N/C = -0.64 \times 10^4\ N/C$. Størrelsen på det totale feltet i punktet P blir dermed $E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = \sqrt{6.36} \times 10^4\ N/C = 2.52 \times 10^4\ N/C$.

1b) Vis at feltet er null i et punkt P' (som ikke ligger i det uendelige) og finn koordinatene (x', y') til dette punktet.

Punktet P' må ligge på linjen mellom de to ladningene. Kaller vi dets avstand til Q_1 for r_1 og til Q_2 for r_2, må vi ha at $Q_1/r_1^2 = Q_2/r_2^2$ eller $r_1^2/r_2^2 = Q_1/Q_2 = 1/16$. Derfor er $r_1/r_2 = 1/4$ slik at $r_1 = 1\,cm$ og $r_2 = 4\,cm$ da den totale avstand mellom ladningene er $r_1 + r_2 = 5\,cm$. Koordinatene til P' er dermed $(x', y') = (0.6, 0.8)\,cm$.

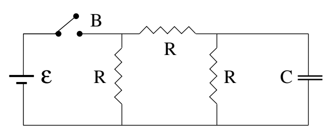
1c) En ladning $Q_3 = 1.0\,\mathrm{nC}$ bringes inn til dette punktet P' fra det uendelige. Hvor stort arbeid (målt i eV) må da utføres?

Arbeidet er lik forandringen i potensiell energi. Da denne er null i det uendelige, blir derfor arbeidet

$$W = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) = 9.0 \times 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} 0.1\,nC\left(\frac{0.2}{0.01} + \frac{3.2}{0.04}\right)\frac{nC}{m}$$

slik at $W = 9.0\times10^{-9}(20+80)\,J = 0.9\times\,\mu J = 0.9\times10^{-6}\,J\times10^{19}eV/1.6J = 5.6\,TeV$.

Oppgave 2
En elektrisk krets er koblet sammen som vist i figuren. Batteriet har en EMS på



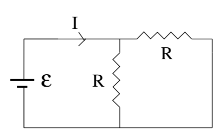
$\mathcal{E} = 6.0\,\mathrm{V}$ og hver av de tre motstandene har verdien $R = 2.0\,\Omega$. Kondensatoren C har kapasiteten $C = 2.5\,\mu\mathrm{F}$ og er opprinnelig uladet. Bryteren B slåes på ved tidspunktet $t = 0$.

2a) Hva blir spenningen over kondensatoren like etter at bryteren er slått på?

Da er ladningen Q på kondensatoren fremdeles null. Da vi generelt generelt har at $V = Q/C$, vil spenningen over den på dette tidspunkt være null.

2b) Beregn strømmen som batteriet da leverer.

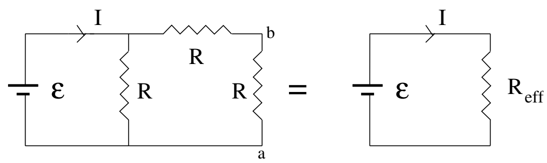
Da spenningen over kondensatoren (og over motstanden som den er parallelkoblet med) er null, kan den erstattes med en enkel leder. Vi kan derfor erstatte den opprinnelige kretsen med den enklere, ekvivalente kretsen:



Strømmen I går derfor gjennom en parallelkobling av to like motstander R som tilsammen tilsvarer den effektive motstanden $R/2 = 1\,\Omega$. Dermed blir strømmen $I = 6V/1\Omega = 6.0\,A$.

2c) Hvor stor er denne strømmen blitt etter at bryteren har stått på veldig lenge?

Da er kondensatoren fullt oppladet, og det găringen strøm gjennom den lenger. Vi har dermed en ny, effektiv krets:



De tre motstandene kan erstattes med en effektiv motstand R_{eff} som figuren viser. Den er en parallellkobling av en motstand R og to motstander R i serie, det vil si $2R$. Derfor

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

Siden $R = 2\Omega$, finner vi $R_{eff} = (4/3)\Omega$ og strømmen $I = 6/(4/3)\,A = 4.5\,A$.

2d) Hva er da spenningen over kondensatoren?

Den er lik spenningen mellom punktene a og b i den effektive kretsen over. Strømmen gjennom disse punktene er $I_2 = V/2R = 6/4A = 1.5A$. Dermed er spenningen $V_{ab} = RI_2 = V/2 = 3.0\,V$ som også er spenningen over kondensatoren.

Oppgave 3

En elektrisk strøm $I = 10$ A går i en rett ledningen som ligger langs z-aksen. Utenfor ledningen oppstår det derved et magnetfelt som kan skrives som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x)}{2\pi r^2}$$

hvor $\mu_0/4\pi = 1.0 \times 10^{-7}$ Tm/A er permeabiliteten til vakuum og $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

3a) Skissér feltlinjene og vis at divergensen til feltet er null, det vil si at $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Feltlinjene er konsentriske sirkler rundt z-aksen. Komponentene til vektorfeltet er $B_x = -(I\mu_0/2\pi)y/(x^2 + y^2)$ og $B_y = (I\mu_0/2\pi)x/(x^2 + y^2)$. Dermed får vi at $\partial B_x/\partial x = (I\mu_0/2\pi)2xy/(x^2 + y^2)^2$ og $\partial B_y/\partial y = -(I\mu_0/2\pi)2xy/(x^2 + y^2)^2$ slik at $\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = 0$.

3b) En stråle av elektroner med hastighet $v = 5.0 \times 10^6$ m/s blir skutt inn parallelt til z-aksen. Beskriv hvordan strålen blir avbøydd av den magnetiske kraften.

Elektronene har hastighet $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_z$ og påvirkes dermed av den magnetiske kraften

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \;=\; \frac{qvI\mu_0}{2\pi}\frac{x\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x}{x^2 + y^2}$$

$$= \quad -\frac{qvI\mu_0}{2\pi}\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{x^2+y^2} = -\frac{qvI\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

For elektronene er q= -e negativ og kraften pusher dem radielt utover bort fra ledningen.

3c) For å forhindre denne avbøyningen, skal det plasseres en elektrisk overfladeladning på ledningen. Vis hvordan det kan fungere og finn størrelsen av den linjeladningen λ som behøves, i enheter av C/m.

Plasseres en overflateladning λ på ledningen, gir den opphav til en elektrisk kraft $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ hvor det elektriske feltet utenfor ledningen er $\mathbf{E} = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\mathbf{r}/r^2$. Den virker derfor i motsatt retning av den magnetiske kraften når λ er positiv. For at de nøyaktig skal kansellere hverandre, må vi at $\lambda = \varepsilon_0\mu_0 vI$. Innfører vi her konstanten (lyshastigheten!) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3.0 \times 10^8\ m/s$, kan vi skrive resultatet som

$$\lambda = \frac{I}{v}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

I vårt tilfelle er $v/c = 1.67 \times 10^{-2}$ slik at $\lambda = 10.0A/(5.0 \times 10^6 m/s) \times 2.78 \times 10^{-4} = 5.56 \times 10^{-10}\ C/m$ = 0.56 nC/m.