UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	FYS1120 – Elektromagnetisme
Eksamensdag:	6. desember 2012
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30
Oppgavesettet er på:	2 sider
Vedlegg:	Formelark (3 sider)
Tillatte hjelpemidler:	Utdelt formelark og godkjent kalkulator Angell (eller Øgrim) og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Lyspære L1 har dobbelt så stor resistans som lyspære L2 (vi regner her resistansen som konstant, dvs. uavhengig av strømmen gjennom lyspærene). Vi kobler så de to lyspærene til et batteri. Hvilken pære vil lyse sterkest hvis pærene er koblet etter hverandre i serie? Forklar.

b) Hva hvis de er koblet i parallell – hvilken lyser da sterkest? Forklar.

Oppgave 2

To ledninger henger 15 m over bakken og med 3 m avstand. Hver av ledningene fører strømmen 10 A, og strømmen går i motsatt retning i de to ledningene.

a) Finn størrelse og retning på den gjensidige magnetiske kraften per 100 m av ledningene.

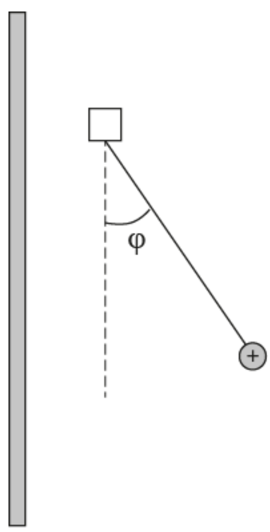
b) Skriv opp Ampere's lov og forklar alle symbolene som inngår. Bruk så loven til å beregne størrelsen på magnetfeltet på bakken i et punkt midt mellom de to ledningene.

Oppgave 3

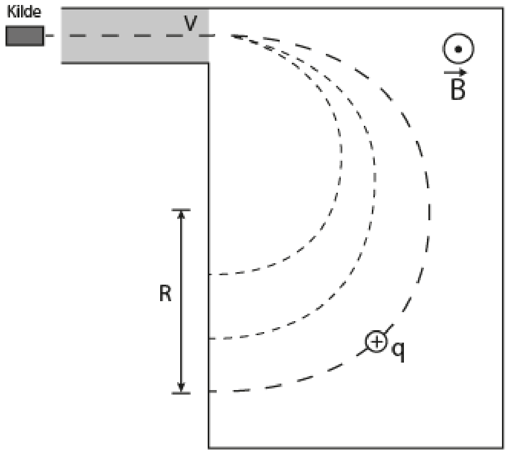
En liten kule med masse 1,0 gram har en ladning på 100 μC. Den henger i en tynn (masseløs) tråd nær en stor, tynn, vertikal plate med uniform ladningsfordeling på 2,5 nC/m^2.

a) Skriv opp Gauss lov og forklar alle symbolene som inngår. Bruk så loven til å beregne det elektriske feltet utenfor platen.

b) Beregn trådens vinkel φ som er vist i figuren til høyre.



Oppgave 4



En massespektrograf brukes til å måle massen til ioner eller til å separere ioner med forskjellig masse. I figuren til venstre akselereres ioner med en masse *m* og ladning *q* gjennom en potensialforskjell *V* (grått område i figuren). Ionene har ingen hastighet før de kommer inn i dette elektriske feltet.

Så kommer de inn i et uniformt magnetfelt *B* som er orientert vinkelrett på deres bevegelsesretning og de avbøyes derfor i en sirkulær bane med radius *R*. En detektor måler hvor ionene ender sin halvsirkelformede bevegelse og ut fra dette måles *R*.

Figuren til venstre viser oppsettet.

a) Vis at uttrykket som kan brukes til å beregne ionenes masse ut fra målinger av *B, V, R* og *q*, blir:

$$m = \frac{q\,B^2\,R^2}{2V}$$

b) Hvilken potensialforskjell *V* trenger man for at ionisert ^{12}C (masse = $2{,}00\times10^{-26}$ kg og positiv ladning = $1{,}602\times10^{-19}$ C) skal ha R = 50,0 cm i et 0,150 T magnetfelt?

c) Anta at ione-strålen inneholder en blanding av ^{12}C og ^{14}C – ioner. Beregn avstanden mellom disse to isotopene ved detektoren, hvis *V* og *B* har samme verdier som i spørsmål b). ^{14}C har masse = $2{,}34\times10^{-26}$ kg og samme ladning som ^{12}C ionene.

d) Vi går nå bort fra massespektrometeret og tenker generelt. Hvis en ladd partikkel beveger seg i en rett linje gjennom rommet, betyr det at det ikke er noe magnetfelt i området? Forklar.

Oppgave 5

En motstand (resistans) på 100 kΩ er koblet i serie med en kondensator (kapasitans) på 10 nF.

a) Hvilken impedans *Z* har denne seriekoblingen ved en frekvens på 200 Hz? Oppgi både modul og fase.

b) En <u>parallell</u>kobling av en motstand og en kondensator har samme impedans ved 200 Hz (modul og fase) som seriekoblingen i spørsmål a). Beregn motstandens resistansverdi *R* og kondensatorens kapasitansverdi *C* i denne parallellkoblingen.

c) En spole kobles så i parallell med de to komponentene i spørsmål b). Tegn et kretsskjema som viser disse tre komponentene. Hvilken induktansverdi *L* må spolen ha for at fasevinkelen til parallellkoblingens impedans skal bli null grader ved 200 Hz?

Equations sheet for FYS1120

November 26, 2012

Electric fields

Coulomb's law

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,d\tau$$

Dipoles

$$\tau = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} \qquad \tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$$

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} \qquad \mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

$$U_B = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \qquad U_E = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$

Potential, energy and work

$$W_{a\to b} = U_a - U_b$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

$$\nabla V = -\mathbf{E}$$

Energy density in electromagnetic field

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

Energy stored in solenoid and capacitor:

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2, \quad U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Maxwell's equations

In general

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{E}\cdot\mathrm{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot\mathrm{dl} = \mu_0\left(I_c + \epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{encl}$$

In matter

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = Q_{f_{enc}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{E}\cdot\mathrm{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{H}\cdot\mathrm{dl} = I_{f_{enc}} + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A}$$

Definitions

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

In linear media

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$$

Lorentz force

$$\mathbf{F} = q\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B} + q\cdot\mathbf{E}$$

Magnetism

Flux:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Magnetic force on a conductor:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Faraday's law and emf

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

All or parts of a closed loop moves in a **B** field:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Biot-Savart law

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Self inductance & Mutual inductance

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}, \quad \mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

Continuity of magnetic flux

$$\oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}\,.$$

over a closed surface.

Capacitor

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

Capacitors in series:

$$1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + ...$$

Capacitors in parallel:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ...$$

Resistor

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho L}{A}$$

Resistors in series:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + ...$$

Resistors in parallel:

$$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + ...$$

Circuits

Current:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A$$

Effect:

$$P = VI\,.$$

Over ohmic resistance:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}\,.$$

RC circuit

Charging capacitor in RC-circuit:

$$q = \mathcal{E}C\left[1 - e^{(-t/(RC))}\right]$$

Decharging capacitor:

$$q = Q_0 e^{(-t/(RC))}$$

RL circuit

$$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-t(R/L)}\right]$$

Without emf:

$$-L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$I = I_m e^{-t(R/L)}$$

LC circuit

$$\frac{q}{C} = L\frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{LC} = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow q = Q_m \cos(\omega_0 + \phi) \quad (3)$$

RCL

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{4}$$

$$q = Q_m e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \phi)$$

Q_m and ϕ are dependent on the initial conditions.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

Driven RCL

Complex current, voltage, impedance with inductive and capacitive reactance.

$$\hat{I} = \frac{V_m}{Z}e^{i\omega t - \phi} \quad \hat{V} = V_m e^{i\omega t}$$

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

We have

$$L\frac{d^2\hat{I}}{dt^2} + R\frac{d\hat{I}}{dt} + \frac{\hat{I}}{C} = i\omega V_m e^{i\omega t}$$

Phase difference

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Power of RCL

$$\bar{P} = RI_{rms}^2 = V_{rms}I_{rms}\cos\phi$$

Impedance

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$X = X_L - X_C$$

$$\mathbf{Z} = R + jX = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m}$$

Reactance

Capacitive

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad B = \omega C$$

Inductive

$$X_L = \omega L, \quad B = -\frac{1}{\omega L}$$

Admittance

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = G + jB = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

Transformers

$$\frac{V2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

Units

Henry:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{m^2 \cdot kg}}{\mathrm{s^2 \cdot A^2}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A^2}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}} \tag{5}$$

$$= \frac{\mathrm{J/C \cdot s}}{\mathrm{C/s}} = \frac{\mathrm{J \cdot s^2}}{\mathrm{C^2}} = \frac{\mathrm{m^2 \cdot kg}}{\mathrm{C^2}} = \Omega \cdot \mathrm{s} \tag{6}$$

Ampere:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Tesla:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C \cdot s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A \cdot s^2}}$$

1 Constants

Proton mass

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Proton charge

$$q_p = 1e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Electron mass

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

Electron charge

$$q_e = -1e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Electrical permittivity in vacuum

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$$

Gravitational constant

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$$

Magnetic permeability

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}$$

Speed of light

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$