UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	FYS1120 — Elektromagnetisme
Eksamensdag:	29. November 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Noen formler / Some formulas
Tillatte hjelpemidler:	Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Dette er oppgaver og løsningsforslag til avsluttende eksamen i FYS1120 høsten 2016. Merk at symmetriargumentene vi bruker i oppgavene om Gauss' lov og Ampères lov er mer detaljerte enn det vi krever for å få full uttelling på eksamen.

Sensorveiledning:
Vi gir inntil 4 poeng (4p) per deloppgave. I de fleste deloppgavene er det gitt en relativt presis bekrivelse av hva som skal til for å få et gitt antall poeng, men noen steder blir det mer skjønnsmessig.

Oppgave 1

(a)

Skriv Gauss' lov på matematisk form, og beskriv presist alle symbolene som inngår.

Løsning:
Gauss' lov:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Symbolene i Gauss' lov:

(Fortsettes på side 2.)

$\mathbf{\Phi}_E$	–	Elektrisk fluks gjennom en lukket flate.
$\oint$	–	Integral over en lukket flate
$\mathbf{E}$	–	Elektrisk felt
$\mathrm{d}\mathbf{A}$	–	Infinitesimalt arealelement representert som en vektor normalt på flaten.
Q_{encl}	–	Ladning innesluttet av Gaussflaten
ϵ_0	–	Elektrisk vakuumpermittivitet

Sensorveiledning:

- 1p – Skrive opp Gauss' lov riktig
- 3p – Riktig beskrivelse av symbolene, 0.5p per riktig beskrevne symbol.

(b)

Bruk loven til å finne et uttrykk for E-feltet fra en uendelig lang og rett linjeladning med konstant ladningstetthet λ per lengde.

Løsning:
Vi legger en sylinderformet Gaussflate med sylinderakse lik linja ladningen ligger på. Vi setter sylinderens lengde til l og radien til r. Av symmetrigrunner vil feltet over den kurvede flaten på sylinderen være homogent over og stå normalt på den kurvede delen av Gaussflaten, og parallelt med Gaussflaten over endeflatene. Symmetrier: Feltstyrken er homogen over gaussflaten pga rotasjonssymmetri om sylinderaksen (feltstyrken kan ikke endre seg om vi roterer ladningsfordelingen). Feltet står normalt på Gaussflaten pga speilsymmetri langs ladningsfordelingen (feltet kan ikke endre seg om vi snur linjeladningen).

Dermed har vi:

$$\Phi_E = E 2\pi r l = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \tag{2}$$

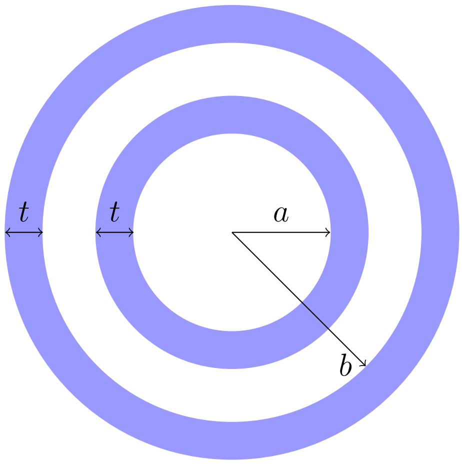
$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \tag{3}$$

(Fortsettes på side 3.)

Sensorveiledning:

- 2p – Argumentere for at feltet er homogent over sylinderskallet (unntatt endeflatene), og at det står radielt ut fra sylinderaksen.
- 2p – Riktig utregning

Betrakt to hule og konsentriske sylindre, begge sirkulære i tverrsnitt og med tykkelse t. Figuren viser snitt gjennom konfigurasjonen. Sylindrene er laget av metall, og den indre har ladningstetthet (per lengde) $-\lambda$, mens den andre har tettheten 2λ. Anta at sylindrene er uendelig lange.



(c)

Finn uttrykk for E-feltet utenfor den ytre sylinderen, og i den indre hulrommet.

Løsning:
På grunn av sirkelsymmetri om sylinderaksen kan vi anta homogen feltstyrke over buet sylinderflate, og pga speilsymmetri om et plan med normalvektor parallell med sylinderaksen, kan vi anta at feltet står normalt på buet sylinderflate. Dermed er feltet utenfor den ytre sylinderen $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ rettet utover, og feltet i det indre hulrommet $E = 0$.

Sensorveiledning:

- 2p – Riktig felt utenfor. 1p for feltet og 1p for symmetriargumentet.
- 2p – Riktig felt innenfor. 1p for feltet og 1p for symmetriargumentet.

(d)

Finn feltet i alle de resterende områdene.

Løsning:
Siden sylindrene er laget av metall, vil feltet inni selve metallet være 0. Det siste området er området mellom sylindrene. Vi har symmetri som i forrige deloppgave, og feltet er $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ rettet innover.

Sensorveiledning:
Siden geometrien ikke er endret siden forrige deloppgave er ikke symmetriargumenter del av poenggivningen her.

- 2p – Feltet er null i metall.
- 2p – Riktig felt mellom sylindrene. (1p for uttrykket, 1p for retningen)

Oppgave 2

(a)

Definer elektrisk strømtetthet og beskriv presist relasjonen mellom strømtetthet og resistiviteten til et materiale.

Løsning:
Strømtetthet: $J \equiv I/A$, eventuelt $\mathbf{J} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}a_\perp}$. Resistiviteten er den inverse av proporsjonalitetskonstanten mellom strømtetthet og elektrisk felt: $J = \frac{E}{\rho}$. Kanskje oftere oppgitt som $\rho = \frac{E}{J}$, altså forholdet mellom elektrisk felt og strømtetthet.

(Fortsettes på side 5.)

Sensorveiledning:

- 2p – et riktig uttrykk for strømtetthet.
- 2p – en riktig likning eller presis riktig formulering av resistivitet.

Betrakt en uendelig lang rettlinjet strømførende ledning med sirkulært tverrsnitt med radius R. Finn uttrykk for B-feltet i en avstand r fra ledningens senter dersom:

(b)

strømmen, I, fordeler seg jevnt over hele ledningens tverrsnitt,

Løsning:
Her er det lurt å bruke Ampères lov: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_{encl}$ med Ampèresløyfe som sirkel med normalvektor parallell og sentrum sammenfallende med et vilkårlig punkt langs sylinderaksen. Rotasjonssymmetri av strømtettheten gir oss homogen feltstyrke over den valgte Ampéresløyfa. Fra $\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}$ i Biot-Savarts lov ser vi at ethvert bidrag til magnetisk felt fra en rett strøm vil bidra i planet normalt på strømmen. Speilsymmetri om en vilkårlig akse normalt på og gjennom sylinderaksen bør overbevise oss om at bidrag fra hver side av symmetriaksen bidrar konstruktivt for konsentriske sirkelkomponenter av B-feltet, og destruktivt for radielle komponenter. Derfor står feltlinjene som konsentriske sirkler rundt ethvert punkt på, og normalt på, sylinderaksen.

I vissheten om dette bruker vi Ampères lov, først for $r \leq R$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \tag{4}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{5}$$

For $r > R$ har vet vi at $I_{encl} = I$, slik at $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Sensorveiledning:

- 1p – Innse at Ampères lov er en lur framgangsmåtable
- 1p – Riktig utregning

(Fortsettes på side 6.)

- 2p – Riktig bruk av symmetriargumenter. Her gir vi 1p for å nevne at symmetriene gjør at det går bra"og 1p for å faktisk gjøre symmetriargumentet, men det trenger ikke være like presist som løsningsforslaget legger opp til.

Andre framgangsmåter som leder eller kan lede fram til riktig svar kan også gi full uttelling, men man får ingen poeng for å for eksempel bare skrive opp Biot-Savarts lov.

og dersom:

(c)

strømmen, I, flyter bare i den ytre delen, $R/2 \leq r \leq R$, der den også nå er jevnt fordelt.

Løsning:

Symmetrier er behandlet i forrige oppgave, og gjelder fortsatt. I dette tilfellet får vi ingen innsluttet strøm for $r < R/2$, slik at $B = 0$ i dette området. For $R/2 < r < R$ har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi(r^2 - (\frac{R}{2})^2)}{\pi(R^2 - (\frac{R}{2})^2)} \tag{6}$$

slik at $B = \frac{\mu_0 I(r^2 - (\frac{R}{2})^2)}{2\pi r(R^2 - (\frac{R}{2})^2)} = \frac{2\mu_0 I(r^2 - \frac{R^2}{4})}{3\pi r R^2}$. Som i forrige deloppgave har vi $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ for $r > R$.

Sensorveiledning:

- 4p – riktig utregning

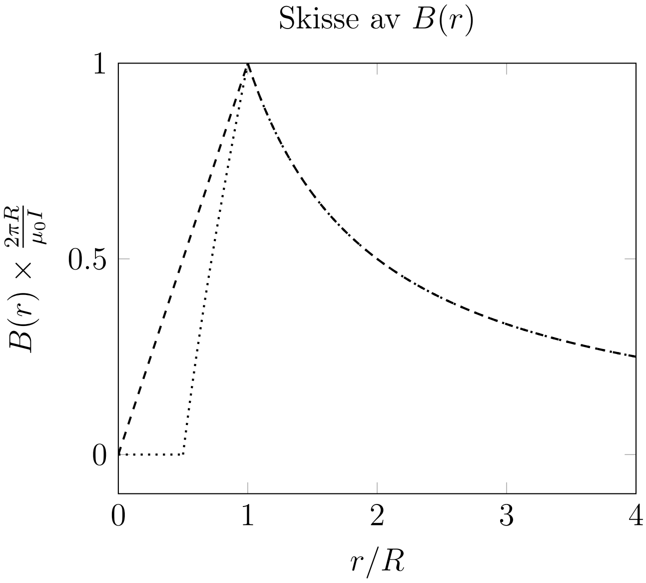
Her skal i utganspunktet bruk av Amperès lov og symmetriargumenter være klare fra forrige deloppgave, og de trenger ikke være med for å gi full uttelling på denne deloppgaven.

(d)

Skisser de to fordelingene $B(r)$ for $r \leq 4R$. Lag gjerne skisser selv om du ikke fant svar på spørsmål (b) og (c).

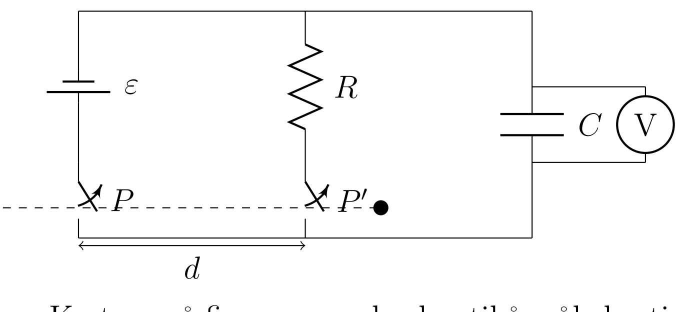
(Fortsettes på side 7.)

Løsning:
Den stiplede linja korresponderer til løsningen i b), og den prikkete til løsningen i c).



Sensorveiledning:
I utgangspunktet 2p for hver riktig strek i skissen. Vi stiller ikke krav til skalering av aksene selv om det er med i løsningsforslaget. Dersom man har gjort feil i b) og c) kan man få full uttelling for å tegne strekene som korresponderer til de svarene man fikk i b) og c), men likevel ikke mer enn 2p dersom disse kun inneholder $\frac{1}{r}$-ledd.

Oppgave 3



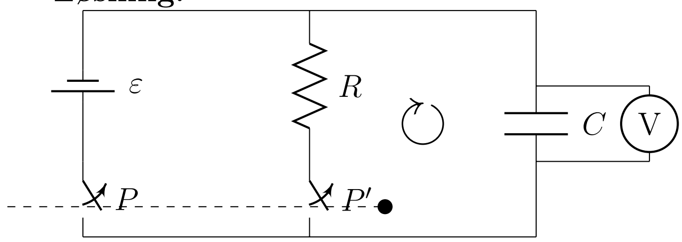
Kretsen på figuren over brukes til å måle hastigheten til en kule. Fra start er kondensatoren fullt oppladet av batteriet i det kulen ankommer fra venstre med hastighet v, og bryter kretsen i punktet P. Anta at voltmeteret har en uendelig stor intern resistans.

(Fortsettes på side 8.)

(a)

Vis på en figur hvor strømmen går i kretsen etter at kulen har passert P. Finn et uttrykk for strømmen.

Løsning:



Strømmen går kun i sløyfa indikert i figuren. Dette er en ren utladning av kondensator i serie med en motstand, og da er strømmen gitt som $I = I_0 e^{\frac{-t}{RC}}$, der $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$.

Sensorveiledning:

- 1p – Strømmen indikert i riktig halvdel av kretsen
- 1p – Riktig retning på strømmen
- 2p – Riktig uttrykk for strømmen som funksjon av tid. 1p dersom man kun har oppgitt $I = I_0 = \varepsilon/R$.

Kulen fortsetter med uendret hastighet og bryter kretsen også i P'. Voltmeteret måler da $V = \varepsilon/3$.

(b)

Vis at hastigheten til kulen kan bestemmes fra formelen,

$$v = \frac{d}{RC\ln 3}. \tag{7}$$

Løsning:
Vi begynner med å se at hastigheten må være $v = \frac{d}{t}$, altså strekning/tid. Siden voltmeteret viser $\frac{\varepsilon}{3}$ vet vi at $e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{1}{3}$, slik at $\frac{-t}{RC} = \ln\frac{1}{3}$, eller $t = RC\ln 3$. Vi setter dette inn i likningen for hastigheten. Dermed er $v = \frac{d}{RC\ln 3}$.

(Fortsettes på side 9.)

Sensorveiledning:

- 2p – Se at man må sette $I(t) = I_0/3$. Her kan man få poeng både om man har feil uttrykk for $I(t)$ og om man ikke har det i det hele tatt, men på dette tidspunktet må man innse at det finnes en $I(t)$.
- 2p – Riktig videre utledning derifra. Dersom man på dette tidspunktet mangler eller har et urimelig uttrykk for I(t) kan man ikke få disse poengene.

Avstanden d er 50 cm, kapasitansen C er 100 nF og resistansen R er 4 kΩ.

(c)

Hvor stor var hastigheten i dette tilfellet?

Løsning:
Her skal vi kun sette inn tall i svaret fra forrige deloppgave.

$$v = \frac{d}{RC \ln 3} = \frac{50\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{k\Omega} \times 100\,\mathrm{nF} \times \ln 3} \approx 1140\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{8}$$

Sensorveiledning:
Dette er en relativt grunleggende øvelse i å taste tall på kalkulator. Her skal vi være strenge.

- 1p – En rimelig avrunding. Mellom 1 og 4 signifikante siffer.
- 1p – Riktig koeffisient i normalformen til svaret (altså man får poeng om man har feil med en faktor 10^n $\forall$ n.)
- 1p – Riktig eksponent i normalformen (ikke feil med faktor 10^n)
- 1p – Riktig enhet

Oppgave 4

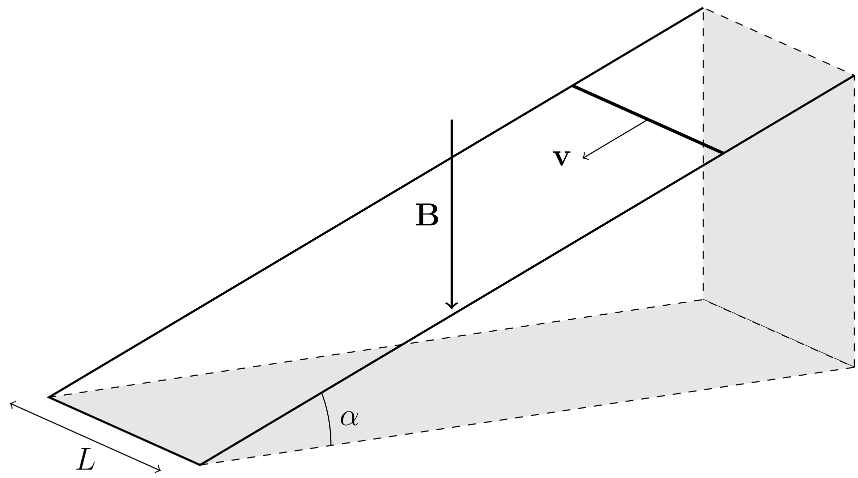
(a)

Beskriv innholdet i Lenz' lov så presist du kan.

(Fortsettes på side 10.)

Løsning:
Strøm indusert i en leder som befinner seg i et varierende magnetisk felt vil være slik at den setter opp et felt som motvirker endringen som forårsaket den.

Sensorveiledning:
Her er det lett å blande med Faradays induksjonslov, og det er ikke særlig klanderverdig. Derfor får man inntil 2p for å heller skrive opp Faradays lov og beskrive symbolene riktig. Ellers godtar vi mye forskjellig, men man må få med seg hovedpoenget, nemlig at en leder vil motsette seg magnetfeltendringer. Skjønnsmessig vurdering fra 0p til 4p. Man får 2p for å skrive "Lenz' lov er det negative fortegnet i Faradays induksjonslov". Dvs at dersom man har skrevet opp Faradays induksjonslov med beskrivelser og skriver på at minustegnet representerer Lenz' lov, får man 4p.



Et par lange parallelle metallskinner holdes på skrå i en vinkel α i forhold til horisontal-planet. Skinnene har en avstand L, og er elektrisk sammenkoblet i bunnen. På tvers over skinnene ligger en metallstav med masse m og resistans R. Resistansen i skinne-systemet er neglisjerbar. Et statisk homogent vertikalt magnetfelt, B, er til stede overalt, se figur. Staven slippes nå med null startfart, og vi ser bort fra friksjon.

(b)

Hva blir retningen på den induserte strømmen? Gi fysiske argumenter.

(Fortsettes på side 11.)

Løsning:
Magnetfeltet er rettet nedover, slik at når staven beveger seg pga. tyngdekraften vil magnetfluksen rettet nedover reduseres. Da vil det i henhold til Lenz' lov settes opp en strøm medsols (sett ovenfra) for å kompensere dette flukstapet.

Sensorveiledning:

- 2p – Et godt fysisk argument
- 2p – Riktig strømretning, gitt at det fysiske argumentet var rimelig. Om det fysiske argumentet tvetydig kan man få inntil 1p, om det var urimelig får man 0p.

(c)

Utled et uttrykk for den magnetiske kraften på den glidende staven.

Løsning:
Kraft på strømførende leder normalt på magnetfelt: $F = ILB$. Strømmen er her den strømmen vi får indusert pga. fluksendringen: $I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{vBL\cos\alpha}{R}$. Dermed er $F_B = -\frac{L^2 vB^2\cos\alpha}{R}$. Denne kraften virker horisontalt, altså i samme retning som $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

Sensorveiledning:
Denne oppgaven blir nok krevende å sensurere, men vi får la det stå til.

- 2p – Ha riktig uttrykk for fluksendringen, enten for seg selv, eller som del av et uttrykk (f. eks. slik som i løsningsforslaget). Man får 1p om vinkelavhengigheten mangler.
- 2p – Riktig størrelse på kraften. Her trekkes ikke for følgefeil fra forrige del av oppgaven, med mindre man har mistet hastighetsavhengigheten. Da får man 0p. 1p dersom man har gjort mindre algebrafeil som ikke tar ut hastighetsavhengigheten.

I denne oppgaven har vi ikke bedt eksplisitt om retningen på kraften, så vi trekker ikke for det i denne omgang (men vi gjør det i neste deloppgave).

(Fortsettes på side 12.)

(d)

Forklar hvorfor det finnes en øvre grense for hastigheten. Finn et uttrykk for grenseverdien.

Løsning:
Vi ser at den magnetiske kraften har en komponent $F_B \cos\alpha$ mot bevegelsesretningen, og at den er proporsjonal med hastigheten. Komponenten langs skråplanet av gravitasjonskraften, som driver staven nedover skråplanet, er konstant lik $mg \sin\alpha$. Dermed må det finnes en hastighet der den magnetiske kraften fullstendig opphever gravitasjonskraften.

Setter opp kraftlikevekt langs skråplanet:

$$\sum F = F_G + F_B = mg\sin\alpha - \frac{L^2 v B^2 \cos\alpha}{R}\cos\alpha \tag{9}$$

Stabil hastighet nås når $\sum F = 0$. Dermed er

$$v_{max} = \frac{mgR}{L^2B^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \tag{10}$$

Sensorveiledning:

- 1p – Innse at magnetkraften virker mot gravitasjonskraften.
- 1p – Sette opp kraftlikevekt, summen av krefene lik 0, enten eksplisitt eller implisitt.
- 1p - Riktig uttrykk for gravitasjonskraften, inkludert vinkelavhengigheten.
- 1p – Riktig manipulering av uttrykket ut ifra det man har satt opp tidligere i oppgaven. Dersom svaret er urimelig uten at det er kommentert gis 0p.

(Fortsettes på side 13.)