UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	FYS1120 — Elektromagnetisme
Eksamensdag:	29. November 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Noen formler / Some formulas
Tillatte hjelpemidler:	Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Dette er oppgaver og løsningsforslag til avsluttende eksamen i FYS1120 høsten 2016. Merk at symmetriargumentene vi bruker i oppgavene om Gauss' lov og Ampères lov er mer detaljerte enn det vi krever for å få full uttelling på eksamen.

Oppgave 1

(a)

Skriv Gauss' lov på matematisk form, og beskriv presist alle symbolene som inngår.

Løsning:
Gauss' lov:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Symbolene i Gauss' lov:

$\mathbf{\Phi}_E$	–	Elektrisk fluks gjennom en lukket flate.
$\oint$	–	Integral over en lukket flate
$\mathbf{E}$	–	Elektrisk felt
$\mathrm{d}\mathbf{A}$	–	Infinitesimalt arealelement representert som en vektor normalt på flaten.
Q_{encl}	–	Ladning innesluttet av Gaussflaten
ϵ_0	–	Elektrisk vakuumpermittivitet

(Fortsettes på side 2.)

(b)

Bruk loven til å finne et uttrykk for E-feltet fra en uendelig lang og rett linjeladning med konstant ladningstetthet λ per lengde.

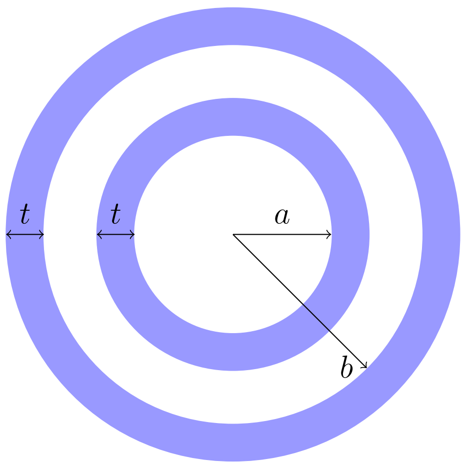
Løsning:
Vi legger en sylinderformet Gaussflate med sylinderakse lik linja ladningen ligger på. Vi setter sylinderens lengde til l og radien til r. Av symmetrigrunner vil feltet over den kurvede flaten på sylinderen være homogent over og stå normalt på den kurvede delen av Gaussflaten, og parallelt med Gaussflaten over endeflatene. Symmetrier: Feltstyrken er homogen over gaussflaten pga rotasjonssymmetri om sylinderaksen (feltstyrken kan ikke endre seg om vi roterer ladningsfordelingen). Feltet står normalt på Gaussflaten pga speilsymmetri langs ladningsfordelingen (feltet kan ikke endre seg om vi snur linjeladningen).

Dermed har vi:

$$\Phi_E = E 2\pi r l = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \tag{2}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \tag{3}$$

Betrakt to hule og konsentriske sylindre, begge sirkulære i tverrsnitt og med tykkelse t. Figuren viser snitt gjennom konfigurasjonen. Sylindrene er laget av metall, og den indre har ladningstetthet (per lengde) $-\lambda$, mens den andre har tettheten 2λ. Anta at sylindrene er uendelig lange.



(c)

Finn uttrykk for E-feltet utenfor den ytre sylinderen, og i den indre hulrommet.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning:
På grunn av sirkelsymmetri om sylinderaksen kan vi anta homogen feltstyrke over buet sylinderflate, og pga speilsymmetri om et plan med normalvektor parallell med sylinderaksen, kan vi anta at feltet står normalt på buet sylinderflate. Dermed er feltet utenfor den ytre sylinderen $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ rettet utover, og feltet i det indre hulrommet $E = 0$.

(d)

Finn feltet i alle de resterende områdene.

Løsning:
Siden sylindrene er laget av metall, vil feltet inni selve metallet være 0. Det siste området er området mellom sylindrene. Vi har symmetri som i forrige deloppgave, og feltet er $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ rettet innover.

Oppgave 2

(a)

Definer elektrisk strømtetthet og beskriv presist relasjonen mellom strømtetthet og resistiviteten til et materiale.

Løsning:
Strømtetthet: $J \equiv I/A$, eventuelt $\mathbf{J} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}a_\perp}$. Resistiviteten er den inverse av proporsjonalitetskonstanten mellom strømtetthet og elektrisk felt: $J = \frac{E}{\rho}$. Kanskje oftere oppgitt som $\rho = \frac{E}{J}$, altså forholdet mellom elektrisk felt og strømtetthet.

Betrakt en uendelig lang rettlinjet strømførende ledning med sirkulært tverrsnitt med radius R. Finn uttrykk for B-feltet i en avstand r fra ledningens senter dersom:

(b)

strømmen, I, fordeler seg jevnt over hele ledningens tverrsnitt,

Løsning:
Her er det lurt å bruke Ampères lov: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \, d\mathbf{l} = \mu_0 I_{encl}$ med Ampèresløyfe som sirkel med normalvektor parallell og sentrum sammenfallende med et vilkårlig punkt langs sylinderaksen. Rotasjonssymmetri av strømtettheten gir oss homogen feltstyrke over den valgte Ampéresløyfa. Fra $\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}$ i Biot-Savarts lov ser vi at ethvert bidrag til magnetisk felt fra en rett strøm vil bidra i planet normalt på strømmen. Speilsymmetri om en vilkårlig akse normalt på og gjennom sylinderaksen bør overbevise oss om at bidrag fra hver side av symmetriaksen bidrar konstruktivt for konsentriske sirkelkomponenter av B-feltet, og destruktivt for radielle komponenter. Derfor står feltlinjene som konsentriske sirkler rundt ethvert punkt på, og normalt på, sylinderaksen.

I vissheten om dette bruker vi Ampères lov, først for $r \leq R$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \, d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \tag{4}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{5}$$

For $r > R$ har vet vi at $I_{encl} = I$, slik at $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

og dersom:

(c)

strømmen, I, flyter bare i den ytre delen, $R/2 \leq r \leq R$, der den også nå er jevnt fordelt.

Løsning:
Symmetrier er behandlet i forrige oppgave, og gjelder fortsatt. I dette tilfellet får vi ingen innsluttet strøm for $r < R/2$, slik at $B = 0$ i dette området. For $R/2 < r < R$ har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \, d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi(r^2 - (\frac{R}{2})^2)}{\pi(R^2 - (\frac{R}{2})^2)} \tag{6}$$

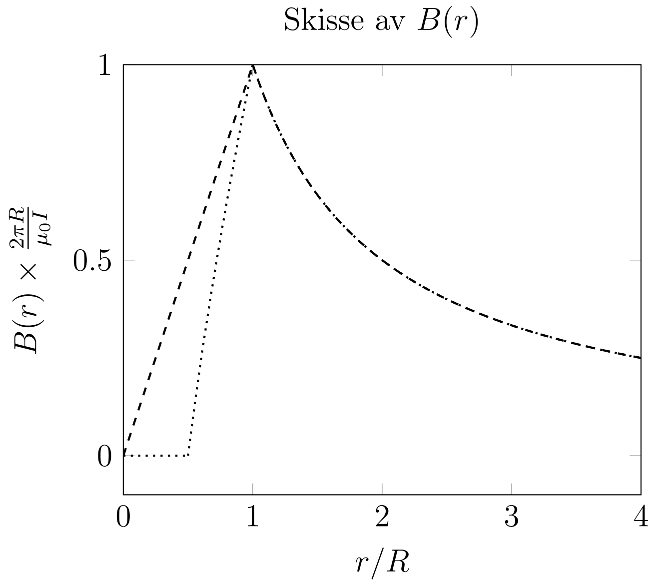
slik at $B = \frac{\mu_0 I (r^2 - (\frac{R}{2})^2)}{2\pi r (R^2 - (\frac{R}{2})^2)} = \frac{2\mu_0 I (r^2 - \frac{R^2}{4})}{3\pi r R^2}$. Som i forrige deloppgave har vi $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ for $r > R$.

(d)

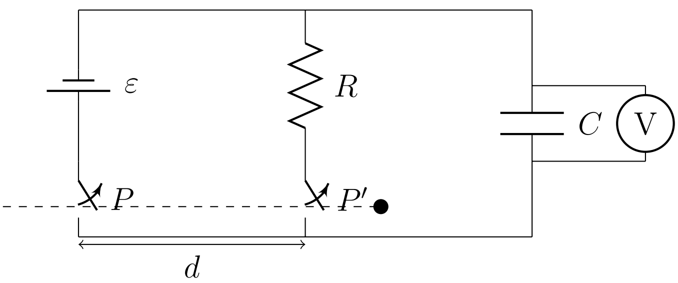
Skisser de to fordelingene $B(r)$ for $r \leq 4R$. Lag gjerne skisser selv om du ikke fant svar på spørsmål (b) og (c).

(Fortsettes på side 5.)

Løsning:
Den stiplede linja korresponderer til løsningen i b), og den prikkete til løsningen i c).



Oppgave 3



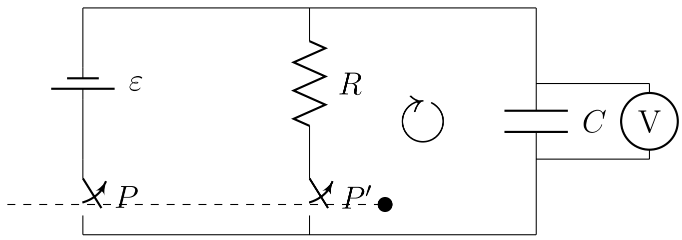
Kretsen på figuren over brukes til å måle hastigheten til en kule. Fra start er kondensatoren fullt oppladet av batteriet i det kulen ankommer fra venstre med hastighet v, og bryter kretsen i punktet P. Anta at voltmeteret har en uendelig stor intern resistans.

(a)

Vis på en figur hvor strømmen går i kretsen etter at kulen har passert P. Finn et uttrykk for strømmen.

Løsning:

(Fortsettes på side 6.)



Strømmen går kun i sløyfa indikert i figuren. Dette er en ren utladning av kondensator i serie med en motstand, og da er strømmen gitt som $I = I_0 e^{\frac{-t}{RC}}$, der $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$.

Kulen fortsetter med uendret hastighet og bryter kretsen også i P'. Voltmeteret måler da $V = \varepsilon/3$.

(b)

Vis at hastigheten til kulen kan bestemmes fra formelen,

$$v = \frac{d}{RC \ln 3}. \tag{7}$$

Løsning:
Vi begynner med å se at hastigheten må være $v = \frac{d}{t}$, altså strekning/tid. Siden voltmeteret viser $\frac{\varepsilon}{3}$ vet vi at $e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{1}{3}$, slik at $\frac{-t}{RC} = \ln \frac{1}{3}$, eller $t = RC \ln 3$. Vi setter dette inn i likningen for hastigheten. Dermed er $v = \frac{d}{RC \ln 3}$.

Avstanden d er 50 cm, kapasitansen C er 100 nF og resistansen R er 4 kΩ.

(c)

Hvor stor var hastigheten i dette tilfellet?

Løsning:
Her skal vi kun sette inn tall i svaret fra forrige deloppgave.

$$v = \frac{d}{RC \ln 3} = \frac{50\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{k\Omega} \times 100\,\mathrm{nF} \times \ln 3} \approx 1140\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{8}$$

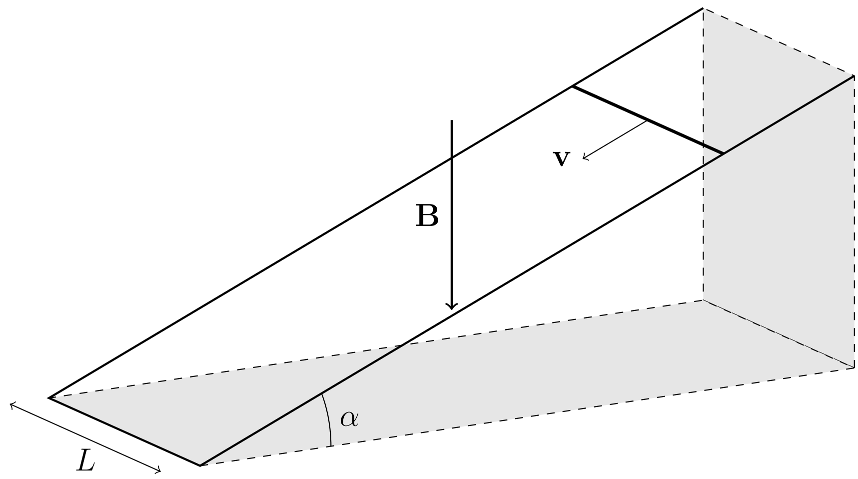
(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 4

(a)

Beskriv innholdet i Lenz' lov så presist du kan.

> **Løsning:**
> Strøm indusert i en leder som befinner seg i et varierende magnetisk felt vil være slik at den setter opp et felt som motvirker endringen som forårsaket den.



Et par lange parallelle metallskinner holdes på skrå i en vinkel α i forhold til horisontal-planet. Skinnene har en avstand L, og er elektrisk sammenkoblet i bunnen. På tvers over skinnene ligger en metallstav med masse m og resistans R. Resistansen i skinne-systemet er neglisjerbar. Et statisk homogent vertikalt magnetfelt, B, er til stede overalt, se figur. Staven slippes nå med null startfart, og vi ser bort fra friksjon.

(b)

Hva blir retningen på den induserte strømmen? Gi fysiske argumenter.

> **Løsning:**
> Magnetfeltet er rettet nedover, slik at når staven beveger seg pga. tyngdekraften vil magnetfluksen rettet nedover reduseres. Da vil det i henhold til Lenz' lov settes opp en strøm medsols (sett ovenfra) for å kompensere dette flukstapet.

(Fortsettes på side 8.)

(c)

Utled et uttrykk for den magnetiske kraften på den glidende staven.

Løsning:
Kraft på strømførende leder normalt på magnetfelt: $F = ILB$. Strømmen er her den strømmen vi får indusert pga. fluksendringen: $I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{vBL\cos\alpha}{R}$. Dermed er $F_B = -\frac{L^2vB^2\cos\alpha}{R}$. Denne kraften virker horisontalt, altså i samme retning som $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

(d)

Forklar hvorfor det finnes en øvre grense for hastigheten. Finn et uttrykk for grenseverdien.

Løsning:
Vi ser at den magnetiske kraften har en komponent $F_B \cos\alpha$ mot bevegelsesretningen, og at den er proporsjonal med hastigheten. Komponenten langs skråplanet av gravitasjonskraften, som driver staven nedover skråplanet, er konstant lik $mg\sin\alpha$. Dermed må det finnes en hastighet der den magnetiske kraften fullstendig opphever gravitasjonskraften.

Setter opp kraftlikevekt langs skråplanet:

$$\sum F = F_G + F_B = mg\sin\alpha - \frac{L^2vB^2\cos\alpha}{R}\cos\alpha \tag{9}$$

Stabil hastighet nås når $\sum F = 0$. Dermed er

$$v_{max} = \frac{mgR}{L^2B^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \tag{10}$$

(Fortsettes på side 9.)