UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS1120 — Elektromagnetisme

Eksamensdag: 10. oktober 2016

Tid for eksamen: 10.00 – 13.00

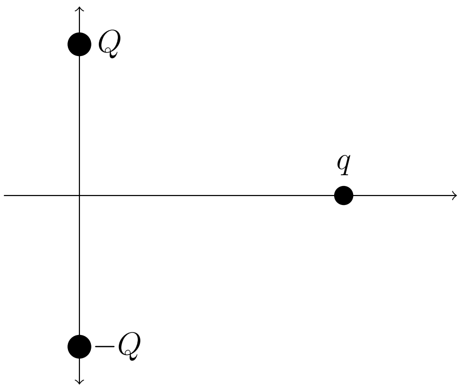
Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg: Fysiske konstanter

Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1



To ladninger, Q og $-Q$, er fast plassert i punktene a og $-a$ på y-aksen, se figuren over. I et punkt x på den horisontale aksen befinner det seg en positiv ladning q.

(a)

Skriv opp Coulomb's lov og definer alle symbolene. Finn uttrykk for kraften på q når $x = 0$.

Løsning:
Coulombs lov: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$. Vi godtar selvfølgelig også vektorformen $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

(Fortsettes på side 2.)

F	Kraften mellom to ladede punktpartikler
ϵ_0	Elektrisk vakuumpermittivitet
q_1, q_2	Størrelse på ladningene
r	Avstand mellom ladningene

Når $x = 0$ vil kun y-komponenten av kraften være ulik 0, og vi trenger kun å se på y-komponenten. Beregner størrelsen på kraften: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Qq}{a^2} + \frac{Qq}{a^2}\right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{a^2}$. Av figuren ser vi at kraften virker nedover langs y-aksen.

(b)

Finn for kraften på q for generell x, og angi dens retning.

Løsning:
Vi ser at x-komponenten av kraften fra Q og $-Q$ er like store, men motsatt rettet, slik at vi kun trenger å se på y-komponenten av kraften. Dersom vi definerer θ som vinkelen origo–Q–q, som er lik vinkelen origo–$-Q$–q, vil y-komponenten av kraften fra hver av de to ladningene være $F\cos\theta$, slik at den totale kraften er $F = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{a^2+x^2}\cos\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{qQa}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Kraften peker nedover langs y-aksen.

(c)

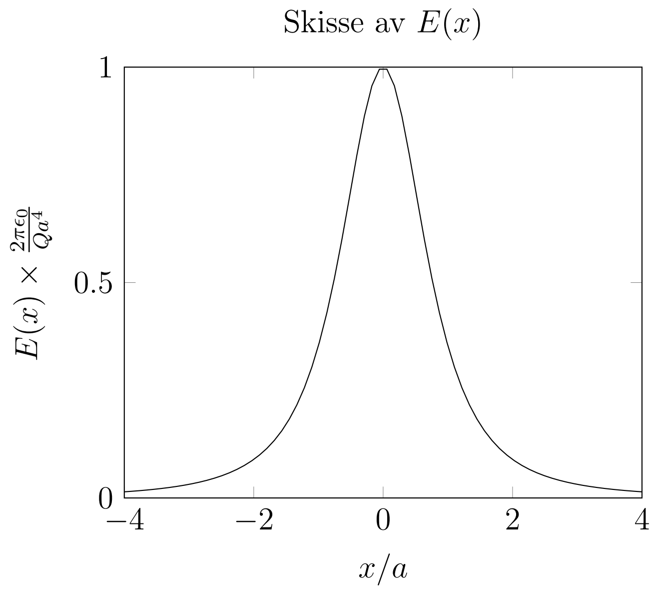
Vis at det totale elektriske feltet fra Q og $-Q$ på x-aksen er gitt som

$$E = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0}(a^2 + x^2)^{-3/2} \tag{1}$$

og lag en graf over funksjonen E(x).

Løsning:
Fra forrige deloppgave kjenner vi kraften på en partikkel med ladning q. Da er det elektriske feltet $E = \frac{F}{q} = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0}(a^2 + x^2)^{-3/2}$.

(Fortsettes på side 3.)



Vi krever ikke at skaleringen av aksene er korrekt for å få full uttelling på denne oppgaven.

(d)

Finn potensialet, V, langs x-aksen.

Løsning:
Vi vet at kraften på partikkelen kun virker langs y-aksen, uavhengig av hvor på x-aksen partikkelen plasseres. Dersom vi ser for oss at vi bringer partikkelen fra det uendelig fjerne, langs x-aksen, så vil kraften fra Q og $-Q$ på q alltid stå vinkelrett på bevegelsesretningen. Dermed er potensialet konstant, og vi kan sette det til 0. $V(x) = 0$.

Oppgave 2

Gauss' lov kan skrives $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

(a)

Beskriv presist alle symbolene i likningen, og bruk loven til å finne et uttrykk for E-feltet rundt en punktladning.

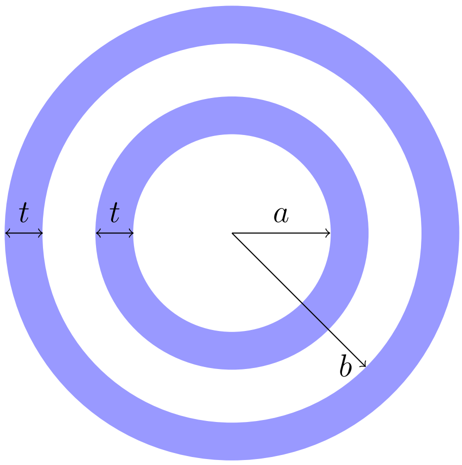
(Fortsettes på side 4.)

Løsning:
Symbolene i Gauss' lov:

$\mathbf{\Phi}_E$	–	Elektrisk fluks gjennom en lukket flate.
$\oint$	–	Integral over en lukket flate
$\mathbf{E}$	–	Elektrisk felt
$\mathrm{d}\mathbf{A}$	–	Infinitesimalt arealelement representert som en vektor normalt på flaten.
Q	–	Ladning innesluttet av Gaussflaten
ϵ_0	–	Elektrisk vakuumpermittivitet

For å finne feltet rundt en punktladning begynner vi med å se at feltet må være rettet radielt fra eller mot punktladningen. Ellers ville feltet endret seg om vi dreide på ladningen, og det er umulig å dreie på ladningen. Siden feltet er radielt rettet kan vi skrive $\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = EA = 4\pi r^2 A$, der r er avstanden fra ladningen. La oss kalle ladningen for q. Da blir det elektriske feltet $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$.

Betrakt to konsentriske kuleskall, begge med tykkelse t. Figuren viser snitt gjennom sentrum av konfigurasjonen. Begge kuleskallene er laget av metall, og det indre skallet har netto ladning q, mens det ytre har ladning $-2q$.



(b)

Finn et uttrykk for det elektriske feltet i rommet utenfor begge kuleskallene, og i det innerste hulrommet.

Løsning:
Konfigurasjonen er sentralsymmetrisk. Dermed er feltet inni det innerste hulrommet 0. Utenfor det ytterste skallet vil feltet bli akkurat som for en punktladning med samme nettoladning som denne sentralsymmetriske konfigurasjonen: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r^2}$.

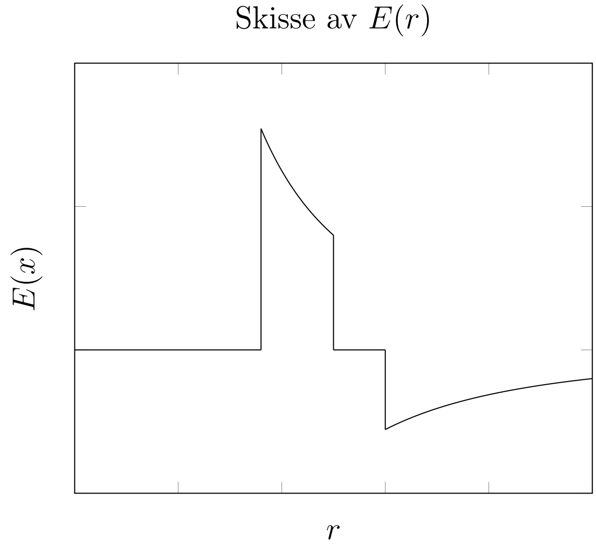
(Fortsettes på side 5.)

(c)

Finn feltet også i de resterende områdene, og skisser en graf som viser fordelingen av E-felt langs en linje radielt ut fra sentrum og til godt utenfor det ytterste skallet.

Løsning:
Siden det er oppgitt at kuleskallene er laget av metall, kan vi anta at de er ledende, og dermed at feltet inni dem er null i en statisk situasjon som denne. I rommet mellom de to kuleskallene trenger vi kun å se på ladningen i det innerste kuleskallet, slik at $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$.

Totalt sett git dette oss feltet som er skissert under:



Oppgave 3

(a)

Resistivitet, ρ, og resistans, R, er relaterte størrelser. Definer begge og kommenter sammenhengen.

Løsning:
Resistivitet er definert som hvilken strømtetthet som tillates i et område med et visst elektrisk felt: $\rho = \frac{E}{J}$. Motstand er definert som hvor mye støm en leder tillater at det går, gitt en påtrykt spenning: $R = \frac{V}{R}$. Sammenhengen er at gitt en resistivitet, så vil geometrien til en leder avgjøre hva motstanden i lederen blir. For en rett leder med et gitt tverrsnittsareal, blir motstanden $R = \frac{\rho L}{A}$.

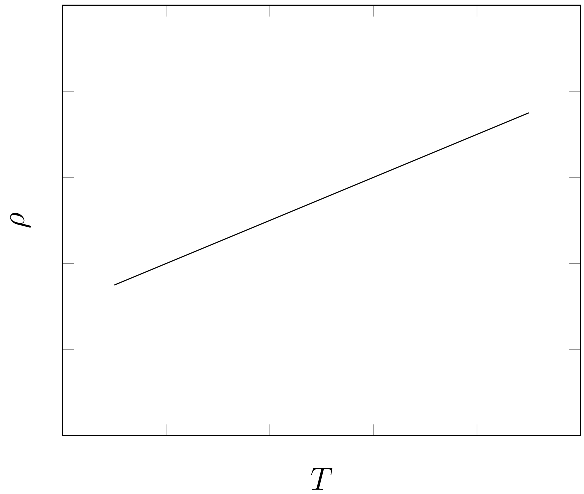
(Fortsettes på side 6.)

(b)

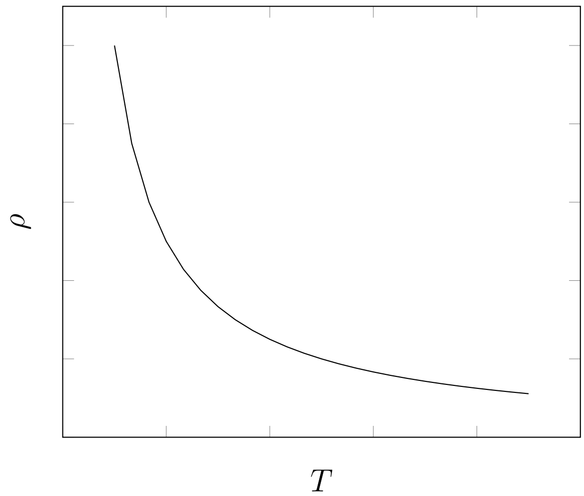
Lag tre grafer som viser kvalitativt hvordan ρ varierer med temperatur for (i) metaller, (ii) halvledere, og (iii) superledere.

Løsning:

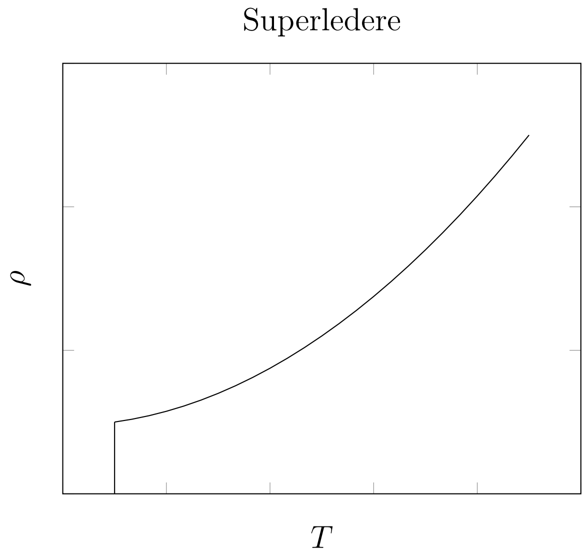
Metaller

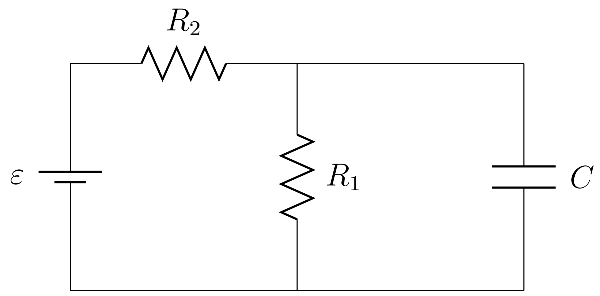


Halvledere



(Fortsettes på side 7.)





Figuren over viser skjema for en krets bestående av et batteri med elektromotorisk spenning, ε, resistansene $R_1 = 6\,\Omega$ og $R_2 = 4\,\Omega$, og en kondensator med kapasitans $C = 9\,\mu\text{F}$. Vi ser bort ifra indre resistans i batteriet.

(c)

Når kondensatoren er fullt oppladet har hver plate en ladning på $36\,\mu\text{C}$ i tallverdi. Hva er spenningen da over kondensatoren?

Løsning:
Kapasitans er definert som $C = \frac{Q}{V}$. Dermed er spenningen over kondensatoren $V = \frac{Q}{C} = 4\,\text{V}$.

(d)

Finn verdien på ε.

(Fortsettes på side 8.)

Løsning:
Siden spenningen over kondentatoren er $4\,\mathrm{V}$ vet vi at spenningen over R_1 også er $4\,\mathrm{V}$. Dermed er strømmen som går i den innerste kretsen ($\varepsilon \to R_2 \to R_1$) gitt som $I = \frac{V}{R} = \frac{4\,\mathrm{V}}{6\,\Omega} = \frac{2}{3}\mathrm{A}$. Videre bruker vi slyngeregelen på den innerste kretsen: $\varepsilon - R_2 I - R_1 I = 0$, som gir oss at $\varepsilon = (R_1 + R_2)I = (4\,\Omega + 6\,\Omega)\frac{2}{3}\mathrm{A} \approx 6.7\,\mathrm{V}$.