UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

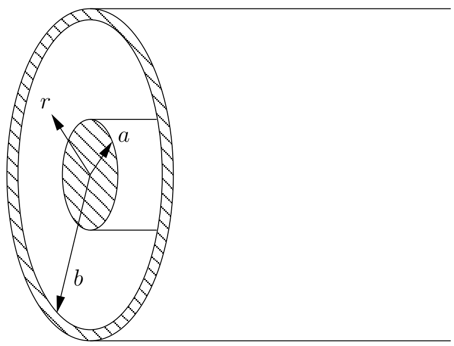
Eksamen i:	FYS1120 — Elektromagnetisme
Eksamensdag:	4. desember 2017
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b (se fig. 1). Kabelens lengde er mye større enn b, og vi ser bort fra effekter nær endene. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet ϵ. Innerlederen har potensial V_0 mens ytterlederen har potensial null.



Figur 1: Koaksialkabel.

a)

Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}$ overalt, uttrykt ved V_0.

Løsning:
Av symmetrigrunner må $\mathbf{D}$ være radielt rettet og uavhengig av ϕ,

$\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l. Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q'. Gauss' lov gir:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r l D(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases}$$

dvs.

$$D(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved å bruke $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ får vi da $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, der

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi \epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

Altså

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Innsatt i uttrykket for $E(r)$ ovenfor gir dette

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \begin{cases} \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne $\mathbf{E}$. Differensialoperatorene uttrykkes da i sylinderkoordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

b)

Finn kapasitansen per lengdeenhet.

Løsning:
Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}.$$

c)

En av Maxwells ligninger er $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Hva heter denne loven? Vis at loven kan skrives om til integralform:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_v \rho \mathrm{d}v, \tag{1}$$

der det lukkede arealet S omslutter volumet v.

Løsning:
Loven heter Gauss' lov (på differensialform). Hvis vi integrerer over et volum v,

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \mathrm{d}v = \int_v \rho \mathrm{d}v,$$

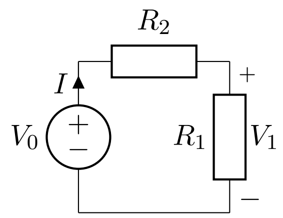
og bruker divergensteoremet, får vi

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_v \rho \mathrm{d}v.$$

Oppgave 2

a)

Finn spenningen V_1 over motstanden R_1 i kretsen i fig. 2. Svaret skal uttrykkes ved V_0 og de to resistansene.



Figur 2: Krets med to motstander.

Løsning:
Strømmen er gitt ved

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2},$$

så vi får

$$V = R_1 I = V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

b)

Motstanden R_2 representerer resistansen i en overføringskabel. Denne resistansen er fast og gitt. Vi ønsker å velge lasten R_1 slik at mest mulig effekt brennes av i den. Hva må R_1 være? Grunngi svaret.

Løsning:
Effekten som brennes av i R_1 er

$$P = R_1 I^2 = R_1 \left(\frac{V_0}{R_1 + R_2} \right)^2 = V_0^2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Hvis vi velger $R_1 = 0$ eller $R_1 = \infty$, blir denne effekten null. Ellers er den positiv. Vi finner derfor maksimum ved å derivere og sette lik null:

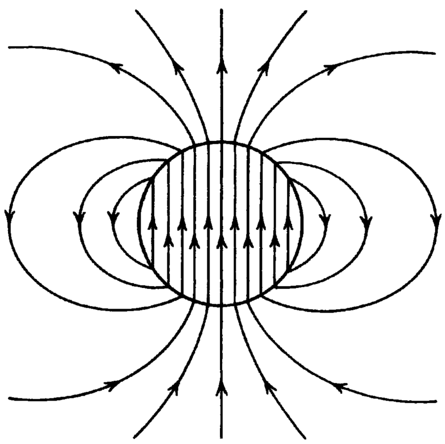
$$0 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_1} = V_0^2 \frac{1 \cdot (R_1 + R_2)^2 - R_1 \cdot 2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^4} = V_0^2 \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)^3},$$

som gir $R_1 = R_2$. Lasten må altså være den samme som resistansen i overføringskabelen.

Oppgave 3

a)

En kule-formet permanentmagnet gir opphav til et felt, se fig. 3. Det er ingen frie strømmer noe sted, og det er vakuum utenfor kula. Er dette **B**- eller **H**-feltet? Grunngi svaret, dvs. forklar at figuren kan passe med det ene feltet, *og* ikke kan være det andre.



Figur 3: En kule-formet permanentmagnet.

Løsning:
Vi ser at feltlinjene biter seg selv i halen, så dette kan være **B**-feltet. At det ikke kan være **H**-feltet, ser vi hvis vi integrerer langs en lukket kurve som svarer til en feltlinje. Siden vi integrerer langs feltet, vil vi få et positivt resultat. Hvis det var **H**, ville derfor $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. Dette er umulig ifølge Amperes lov, siden vi ikke har frie strømmer.

Det holder ikke å bare skrive at **H** skal gå motsatt vei inne i kula. Det er ikke alltid tilfelle at **H** og **B** er motsatt rettet inne i en permanentmagnet. F.eks. i en smultringformet permanentmagnet (ring) vil $\mathbf{H} = 0$.

b)

Forklar med utgangspunkt i grensebetingelsene for **B** og **H** hvorfor feltlinjene knekker på overflaten til kula. (Med "knekke" menes brått å endre retning.)

Løsning:
Grensebetingelsen for **B** innebærer at normalkomponenten til **B** er den samme på begge sider av overflaten. Grensebetingelsen for **H** innebærer at tangensialkomponenten til **H** er den samme på begge sider av overflaten. (Husk at den frie flatestrømtettheten er null ifølge oppgaveteksten.)

Siden $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, betyr grensebetingelsen for **H** at tangensialkomponenten til **B** gjør et hopp. Dette fordi $\mathbf{M} \neq 0$ i kula og $\mathbf{M} = 0$ utenfor.

Det at normalkomponenten til **B** er den samme på begge sider, mens tangensialkomponenten til **B** er forskjellig, fører til at feltlinjene knekker.

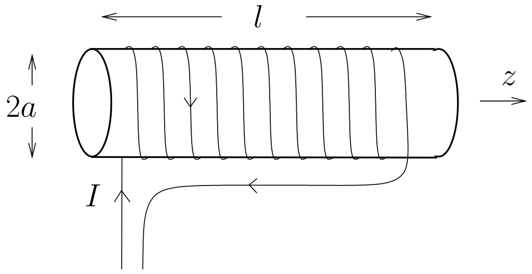
Oppgave 4

a)

Gitt en tettviklet solenoide med totalt N viklinger, se fig. 4. Solenoiden har radius a og lengde l, der $l \gg a$. Viklingene fører strømmen I. Kjernen har permeabilitet μ. Vis at den magnetiske flukstettheten **B** inne i solenoiden er

$$\mathbf{B} = \mu \frac{NI}{l} \hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Du kan ta for gitt at feltet er i $\hat{\mathbf{z}}$-retning (langs aksen), og at det er neglisjerbart utenfor solenoiden. Vi ser bort fra effekter nær endene til solenoiden.



Figur 4: En tettviklet, lang og tynn solenoide.

Løsning:
Vi bruker Ampères lov

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I_{\text{fri, gjennom } C},$$

der integrasjonsveien C er vist i figuren. Vi bruker oppgitt info (som egentlig kommer fra et symmetriargument), at $\mathbf{B}$, og derfor også $\mathbf{H}$, bare har en $\hat{\mathbf{z}}$-komponent. Da $\mathbf{H}$-feltet er null utenfor solenoiden, får vi fra Ampères lov at inne i solenoiden er $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{z}}$, der

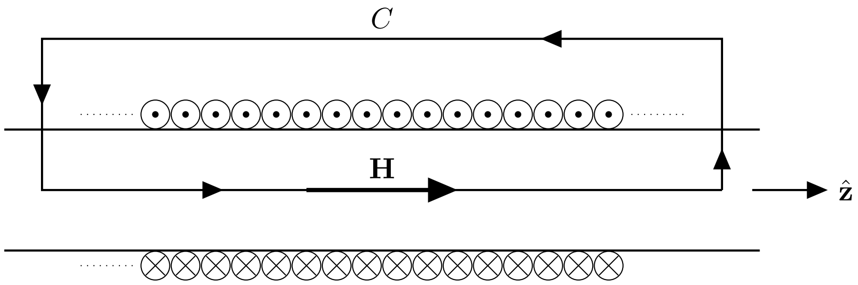
$$Hl = NI,$$

som gir

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Den magnetiske flukstettheten er gitt ved $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, så

$$\mathbf{B} = \mu\frac{NI}{l}\hat{\mathbf{z}}.$$



b)

Finn selvinduktansen L til solenoiden i forrige deloppgave ved å bruke definisjonen ($L = \Phi/I$).

Løsning:
Først finner vi den magnetiske fluksen gjennom et tverrsnitt av

solenoiden. Vi har at

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\text{tverrsn}} B \mathrm{d}S = B \int_{\text{tverrsn}} \mathrm{d}S = \mu \frac{NI}{l} \cdot \pi a^2.$$

Da dette er fluksen gjennom hver av de N viklingene, får vi at den totale fluksen Φ_{tot} for hele solenoiden blir $\Phi = N\Phi_{\text{tverrsn}}$. Altså er selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{\mu\pi a^2 N^2}{l}.$$

c)

Finn den lagrede magnetiske energien ved å bruke uttrykket for energitetthet i magnetisk felt. Sammenlign med uttrykket for energi i en spole.

Løsning:
Den magnetiske energien i et lineært medium er gitt ved

$$W_{\mathrm{m}} = \int_v \frac{1}{2}\mu H^2 \mathrm{d}v.$$

Da **H**-feltet er konstant inne i solenoiden, får vi at

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu H^2 \int_v \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\mu H^2 \cdot \pi a^2 l = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi a^2 N^2}{l} I^2.$$

Dette ser vi at blir likt det vi får fra

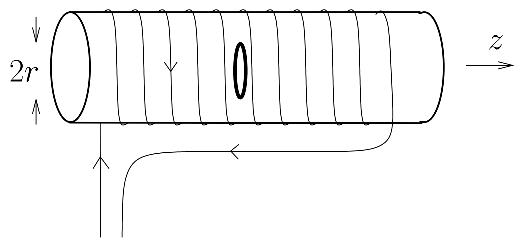
$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2.$$

d)

Strømmen i solenoiden varierer nå med tiden. Det plasseres en ring med radius r inne i solenoiden, se fig. 5. Ringens plan er normalt på z-aksen. Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom solenoiden og ringen. Finn den induserte elektromotoriske spenningen (emf) e_{12} i ringen hvis vi antar at ringen har uendelig resistans så det ikke går strøm i den.

Løsning:
Fluksen i ringen pga. feltet fra solenoiden er

$$\Phi_{12} = \pi r^2 B,$$



Figur 5: En ring med radius r er plassert inne i solenoiden.

siden ringen omslutter et sirkulært areal med flatenormal i samme retning som **B**. Med uttrykket for **B** fra deloppgave a) får vi

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\pi r^2 \mu N}{l}.$$

Den induserte elektromagnetiske spenningen er fra Faradays lov

$$e_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

der vi har brukt $\Phi_{12} = L_{12}I$.

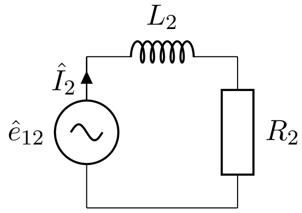
e)

Ringen har nå en kjent, endelig resistans. Forklar med ord hva som skjer med fluksen i ringen, sammenlignet med situasjonen der ringen hadde uendelig resistans. Hvorfor kan vi ikke finne strømmen $I_2(t)$ i ringen ved hjelp av $I_2(t) = e_{12}(t)/R_2$, der $e_{12}(t)$ er svaret i forrige deloppgave?

Løsning:
Med endelig resistans i ringen vil det begynne å gå strøm der. Denne tidsvarierende strømmen setter opp et tidsvarierende felt, som kommer i tillegg til det opprinnelige feltet fra solenoiden (jfr. Lenz' lov). En annen måte å uttrykke dette på, er at ringen har en selvinduktans, som må tas med i tillegg til resistansen. Derfor kan vi ikke bruke $I_2(t) = e_{12}(t)/R_2$.

f)

Ringen inne i solenoiden har resistans R_2 og selvinduktans L_2. Strømmen i solenoiden varierer harmonisk med vinkelfrekvens ω, slik at vi kan se på $e_{12} = \mathrm{Re}\{\hat{e}_{12}e^{i\omega t}\}$ som en harmonisk varierende spenningskilde i ringen. En ekvivalent krets for ringen finnes i fig. 6. Denne kretsen kan du ta for gitt, så du trenger ikke ha fått til de forrige deloppgavene.
Finn amplituden til strømmen i ringen $|\hat{I}_2|$ uttrykt med $|\hat{e}_{12}|$. Hvor stor må R_2 være, sånn cirka, for at vi skal kunne neglisjere selvinduktansen L_2 til ringen? Er betingelsen oppfylt hvis $\omega = 2\pi \cdot 5\,\mathrm{MHz}$, og ringen har resistans $R_2 = 1\,\Omega$ og selvinduktans $L_2 = 50\,\mathrm{nH}$?



Figur 6: Ekvivalentkrets for ringen.

Løsning:
Impedansen til en spole med selvinduktans L_2 er $\hat{Z}_2 = i\omega L_2$. Dermed får vi

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{e}_{12}}{R_2 + \hat{Z}_2} = \frac{\hat{e}_{12}}{R_2 + i\omega L_2}.$$

Dette gir

$$|\hat{I}_2| = \frac{|\hat{e}_{12}|}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{|\hat{e}_{12}|/R_2}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}},$$

der $\tau = L/R$. Betingelsen for å kunne neglisjere L_2 er altså at

$$(\omega\tau)^2 \ll 1 \quad \text{eller} \quad \omega^2 L_2^2 \ll R_2^2.$$

Med de oppgitte verdiene fås $(\omega\tau)^2 \approx 2.5$, så betingelsen er ikke oppfylt.