UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	FYS1120 — Elektromagnetisme
Eksamensdag:	Prøveeksamen 2017
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter Rottman: Matematisk formelsamling Elektronisk kalkulator av godkjent type

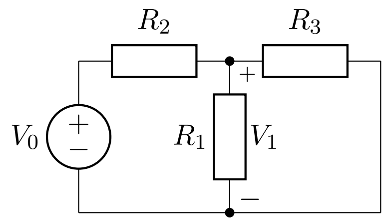
Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1

a)

Finn spenningen V_1 over motstanden R_1 i kretsen i fig. 1.



Figur 1: Krets med tre motstander.

Løsning:
Vi kaller strømmene i motstandene for henholdsvis I_1, I_2 og I_3, med positiv retning mot høyre eller nedover. Da har vi fra Kirchhoffs strømlov:

$$I_2 = I_1 + I_3.$$

Videre har vi $I_1 = V_1/R_1$ og $I_3 = V_1/R_3$. Kirchhoffs strømlov kan derfor skrives om til:

$$I_2 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Dette kunne man også ha funnet ved å innse at R_1 og R_3 er parallellkoblet. Kirchhoffs spenningslov gir

$$V_0 - R_2 I_2 - V_1 = 0.$$

Kombinasjon av de to siste ligningene gir

$$V_1 = \frac{V_0}{1 + R_2/R_1 + R_2/R_3}.$$

b)

Bruk flest mulig metoder til å kontrollere at svaret ditt i forrige deloppgave henger på greip.

Løsning:
Først legger vi merke til at dimensjonene stemmer: Det er dimensjon volt på begge sider av likheten, og i nevneren har alle leddene samme dimensjon (de er alle dimensjonsløse i dette tilfellet).

Hvis $R_2 = 0$ gir uttrykket $V_1 = V_0$, noe vi ser direkte fra figuren at må stemme. Dette får vi også hvis $R_1 = R_3 = \infty$, dvs. åpen krets som gir null strøm og dermed null spenningsfall gjennom R_2.

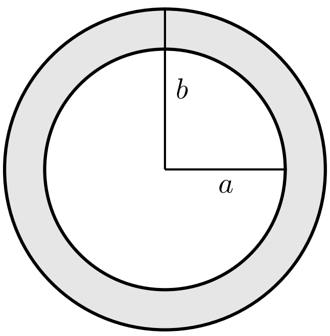
Hvis $R_2 = \infty$ får vi, som forventet, at $V_1 = 0$. Det får vi også hvis $R_1 = 0$ eller $R_3 = 0$.

Hvis R_1 eller R_3 (men ikke begge) er uendelig, ser vi at deres betydning faller bort. Det må være riktig, siden en uendelig resistans er det samme som å ta bort motstanden.

Oppgave 2

a)

Gitt to ideelt ledende, konsentriske kuleskall med radius henholdsvis a og b. Volumet mellom de to lederne (grått område på figuren) er først fylt med et rent dielektrisk medium med permittivitet ϵ. Finn kapasitansen til en slik kondensator.



Løsning:
Vi starter med å bestemme det elektriske feltet inne i kondensatoren. Vi plasserer en fri ladning Q på innerlederen og en ladning $-Q$ på ytterlederen og bruker Gauss' lov $\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{inne i } S}$. Gaussflaten som vi velger oss er et kuleskall med radius r. Grunnet symmetri har vi $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss' lov gir da

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q.$$

Bruk av $D(r) = \epsilon E(r)$ gir

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Vi velger ytterlederen som referansedeloppgave for potensialet slik at

$$V(a) - V(b) = V_0 = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Kapasitansen til kondensatoren er gitt av $C = \frac{Q}{V_0}$:

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}.$$

b)

Kontroller svaret i **a)** ved å vise at kapasitansen blir som for en parallellplatekondensator når sjiktet mellom lederne blir veldig tynt.

Hva blir kapasitansen til en enkelt ledende kule omgitt av materialet ϵ? Tips: Betrakt denne som kulekondensatoren i **a)** når b er mye større enn a.

Løsning:
Vi ser at når $b - a = d \ll a$ kan vi skrive

$$C \simeq \epsilon \frac{A}{d},$$

der $A = 4\pi ab$ er overflaten til kondensatoren og d er avstanden mellom platene. Dette uttrykket er likt det for en parallellplatekondensator.

Betraker vi en enkelt ledende kule som grensetilfellet $b \to \infty$ i deloppgave **a)**, har vi

$$C = 4\pi\epsilon a,$$

for kapasitansen til en kule med radius a.

c)

Vi bytter nå ut det dielektriske mediet mellom de ledende kuleskallene med et delvis ledende medium med konduktivitet σ. Finn resistansen målt mellom de ledende kuleskallene.

Løsning:
Vi kan ikke nå lenger bruke Gauss' lov til å finne feltet slik som i **a)**, siden det kan tenkes det er frie ladninger i området mellom kuleskallene. I stedet bruker vi at strømmen I som går fra indre til ytre kuleskall kan relateres til strømtettheten og dermed det elektriske feltet:

$$I = J(r)4\pi r^2 = \sigma E(r)4\pi r^2.$$

Altså er

$$E(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}.$$

Potensialforskjellen mellom de to kuleskallene blir

$$V(a) - V(b) = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Dermed får vi resistansen

$$R = \frac{V(a) - V(b)}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

d)

En ideell lederkule med radius a graves langt ned i jorda. Hva blir jordingsresistansen målt fra lederkula? En varm sommerdag klager det elektriske anlegget over at jordingsresistansen ikke er som den burde være. Hva kan årsaken være?

Løsning:
Jordingsresistansen fås ved å ta $b \to \infty$:

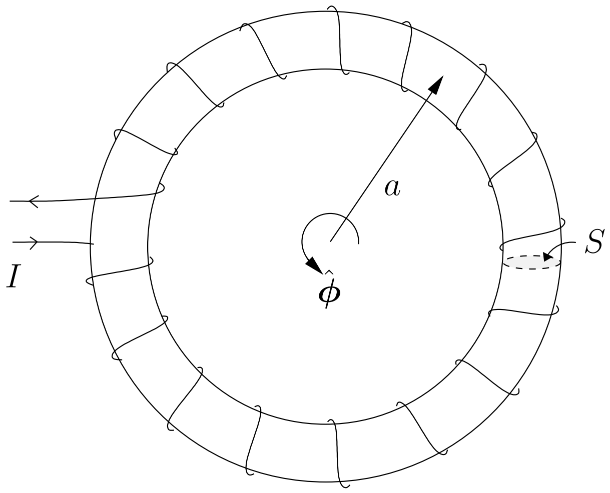
$$R = \frac{1}{4\pi\sigma a}.$$

Jordingsresistansen skal være så liten som mulig. Vi bør altså ha σ stor. Hvis det har vært tørke i lang tid, kan det være for tørt i jorda, slik at σ blir for liten.

Oppgave 3

a)

Gitt en toroide med N viklinger som fører strømmen I, se fig. 2. Viklingene er tett og jevnt fordelt rundt toroiden. Toroiden kan i hele oppgaven antas



Figur 2: En tettviklet toroide med N jevnt fordelte viklinger. Toroiden er tynn og har tverrsnittsareal S.

å være tynn, slik at feltet er uniformt over tverrsnittsarealet S. Finn $\mathbf{H}$ i toroiden.

Løsning:
Symmetrien betyr at $\mathbf{H} = H\hat{\boldsymbol{\phi}}$, der H er uavhengig av ϕ. Bruker Amperes lov på en sirkulær integrasjonskurve C i midten av toroiden, med radius a:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = H 2\pi a = NI,$$

som gir

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

b)

Dersom materialet i kjernen er lineært, isotropt og homogent, hva blir selvinduktansen? Svaret skal uttrykkes ved en parameter som karateriserer mediet (og som kan finnes i tabeller over materialer).

Løsning:
Siden toroiden er tynn, kan vi si at tverrsnittsfluksen er $BS = \mu HS$. Dermed blir den totale fluksen gjennom toroiden

$$\Phi = NBS = \frac{\mu S N^2 I}{2\pi a}.$$

Dette gir selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu S N^2}{2\pi a} = \frac{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0 S N^2}{2\pi a},$$

der den relative permeabiliteten μ_r for materialet kan finnes i tabeller.

c)

Dersom materialet i kjernen nå i stedet har en konstant, permanent magnetisering $\mathbf{M} = M\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (uavhengig av feltet), finn $\mathbf{B}$ i toroiden. Finn også selvinduktansen dersom den defineres som $L = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}I$, der Φ er den totale fluksen.

Løsning:
Vi kan fortsatt bruke Amperes lov til å finne $\mathbf{H}$. Utregningen og resultatet blir i dette tilfellet helt like som ovenfor, siden det bare er den frie strømmen som skal være med på høyre siden av loven.

Generelt har vi $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Siden nå $\mathbf{H}$ og $\mathbf{M}$ er i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$-retning, blir også $\mathbf{B}$ det. Vi får altså

$$\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad B = \mu_0(H + M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a} + \mu_0 M. \tag{1}$$

Total fluks:

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 SI}{2\pi a} + \mu_0 NSM, \tag{2}$$

som gir

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi a}, \tag{3}$$

som i forrige deloppgave. Dette er fordi M er antatt å være konstant.

d)

Vi bytter tilbake til et lineært, isotropt og homogent medium i kjernen. Videre vikles det en spole til rundt toroiden (spole 2), men bare en vikling, se fig. 3. Spole 2 kobles til et voltmeter med uendelig resistans. Den første spolen (spole 1) kobles til en spenningskilde slik at den får strømmen

$$I_1 = I_0 \cos(\omega t).$$

Finn den induserte elektromotoriske spenningen i spole 2.

Løsning:
Den gjensidige induktansen finner vi ved å anta en strøm I_1 i spole 1 og finne fluksen igjennom spole 2. Regningen blir ganske lik som i b), men siden spole 2 har bare en vikling fås

$$L_{12} = \frac{BS}{I_1} = \frac{\mu SN}{2\pi a}.$$

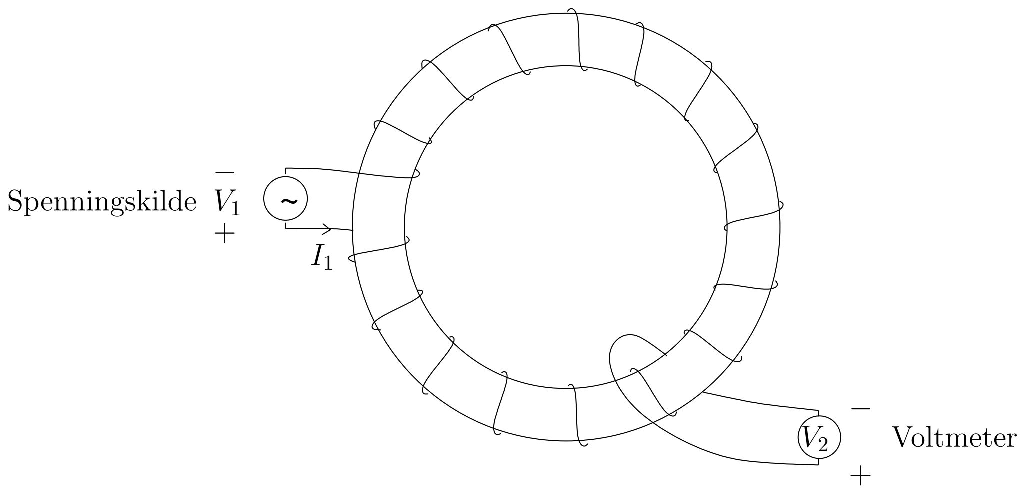
Siden det ikke går strøm i sløyfe 2, blir totalt indusert emf i sløyfe 2 gitt av det som induseres pga. strømmen i sløyfe 1. Den induserte emfen blir altså

$$e_{12} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\omega SNI_0}{2\pi a}\sin(\omega t).$$

Dette er spenningen som måles på voltmeteret.

e)

I forrige deloppgave, hvis vi antar at spole 1 har null resistans, hva må spenningen til kilden være?



Figur 3: Det vikles en spole til rundt toroiden, med en enkelt vikling.

Løsning:
Her bruker vi at summen av emf er lik R_1I_1 som i dette tilfellet er null. Dvs.

$$V_1 + e_{11} = 0,$$

der e_{11} er emfen som induseres i spole 1 pga. strømmen i spole 1. Dette gir:

$$V_1 = -e_{11} = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\omega SN^2I_0}{2\pi a}\sin(\omega t).$$

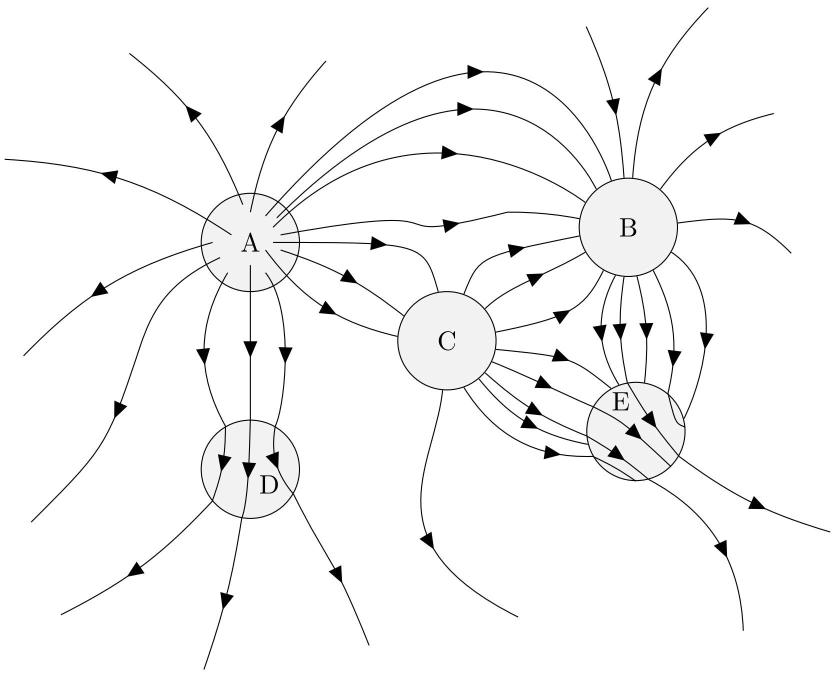
Oppgave 4

Figur 4 viser *flukslinjer* (dvs. **D**-feltlinjer) for et elektrostatisk felt i et område i og omkring fem sylindre A, B, C, D, og E. De forskjellige sylindrene kan beskrives på denne måten:

1. Leder (metall) uten netto ladning.

2. Leder med netto ladning.
3. Dielektrikum (isolator), uten frie ladninger.
4. Vakuum, med romladning.
5. Vakuum, med flateladning på overflaten.

Oppgaven går ut på å bestemme hvilken sylinder som er hva. Hver av sylindrene A, B, C, D, og E, skal altså pares med en av beskrivelsene **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, og **e)**. Begrunn svaret.



Figur 4: Elektrostatisk **D**-felt i et område med fem sylindre.

Løsning:
I ledere kan det ikke være et elektrostatisk felt. B og C er derfor ledere. Det kommer like mange flukslinjer inn til B som det går ut fra den. Altså er den netto ladningen på B lik null. C har positiv netto ladning, siden det går flere flukslinjer ut av C enn det som kommer inn.

D må være dielektrikumet, siden det ikke ender noen flukslinjer på den. Vi ser forøvrig at flukslinjene forandrer retning i overflaten.

I A begynner flukslinjene i det indre av sylinderen, altså er det positiv romladning der. I E ender det flukslinjer på overflaten. Altså er det negativ overflateladning der.

Oppsummert:

A	**d)**
B	**a)**
C	**b)**
D	**c)**
E	**e)**