UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120
Eksamensdag:	Onsdag 12. desember 2018
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	12 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Sensorveiledning. Merk at vi krever fysiske ressonementer og referanser til hvilke lover man tar utgangspunkt i for å få full uttelling i en oppgave. Hvis man ser på en krets skal man angi at man bruker Kirchoffs lov og ikke bare skrive den opp. Det er slik man dokumenterer hvordan man har løst en oppgave og hvordan man har tenkt når man løser en oppgave.

Oppgave 1: Parallelle linjer

a) En ladning q befinner seg i vakuum i punktet $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} = (x_0, 0, 0)$ på x-aksen. Hva er det elektriske feltet i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer vektorene du har brukt i utregningen og retningen på feltet i punktet $\vec{r}$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Coloumbs lov, vektorer, retning på felt.* Trekk 1 forretning på relativ vektor. Trekk 2 for manglende figur. Trekk 2 hvis resultatet ikke er en skalar. Gi kun 1 hvis $\vec{R}$ ikke er definert. Trekk 1 hvis retningen på $\vec{E}$-feltet i punktet $\vec{r}$ ikke er tegnet inn i figuren. (Det er ikke tilstrekkelig å tegne felt-vektorer i punktet $\vec{r}_0$).

Solution. Vi anvender Coloumbs lov. Det elektriske feltet er

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R} \,, \tag{1}$$

hvor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y, z)$ og $\hat{R} = \vec{R}/R$.

* * *

b) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er plassert på x-aksen. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Gauss lov og symmetri.* Trekk 1 hvis ikke symmetri er nevnt. Trekk 1 hvis endenen av sylinderen ikke er diskutert.

Solution. Siden ladningsfordelingen er sylindersymmetrisk vil det elektriske feltet også være sylindersymmetrisk. Feltet vil ikke være avhengig av den azimutale vinkelen ϕ og heller ikke avhengig av x siden systemet blir det samme ved translasjon langs x-aksen og rotatsjon om x-aksen. Derfor må $\vec{E} = E(s)\hat{s}$ hvor $\vec{s} = (0, y, z)$ og $\hat{s} = \vec{s}/s$.

Vi anvender Gauss' lov på en sylinder langs x-aksen med radius s og sentrum på x-aksen og lengde L. Inne i sylinderen er det da en ladning $\rho_s L$. Det vil kun være sylinderoverflaten som vil bidra til fluksen, siden feltet er rettet langs s-aksen. Gauss' lov gir da $2\pi s L E = \epsilon_0 Q_{in} = \epsilon_0 \rho_l L$ og dermed

$$\vec{E} = E(s)\hat{s} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s} \; . \tag{2}$$

c) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er i stedet plassert på en linje parallel med x-aksen gjennom $y = d$. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Avstandsvektor og retning på feltet.*

Solution. Vi anvender resultatet fra oppgaven over, men bruker nå at $\vec{s}' = (0, y - d, z)$:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 s'}\hat{s}' \; . \tag{3}$$

d) La oss nå anta at systemet består av to uendelig lange linjer som er parallelle med x-aksen. Den ene linjen går gjennom punktet $(0, 0, 0)$ og den andre går gjennom $(0, d, 0)$. Begge linjene har uniforme linjeladningstettheter ρ_l. Vis at det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i xy-planet er:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-d}\right)\hat{y} \; . \tag{4}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Superposisjon av feltet.*

Solution. I xy-planet er $\vec{s} = (0, y, 0) = y\hat{y}$ og $\vec{s}' = (0, y-d, 0) = (y-d)\hat{y}$. Vi finner det elektriske feltet ved superposisjon:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 y^2} y\hat{y} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 (y-d)^2}(y-d)\hat{y} \tag{5}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} + \left(\frac{y}{y^2} + \frac{(y-d)}{(y-d)^2}\right)\hat{y} \tag{6}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(y-d)}\right)\hat{y} \tag{7}$$

Vi ser nå på et system som består av en linje langs x-aksen og gjennom origo med en linjeladningstetthet ρ_l som ikke er uniform, men varierer med x:

$$\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_l(x) & 0 \le x \le L \\ 0 & x > L \end{cases} . \tag{8}$$

e) Finn et uttrykk på integral-form for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$ fra linjeladningstettheten $\rho_l(x)$ på x-aksen. (Du skal ikke løse dette integralet).

Sensorveiledning. *Læringsmål: Integrasjon av ladningsfordeling. Bruk av vektorer..* Bruk av Gauss lov gir maks 1.

Solution. Vi deler linjen opp i små deler. En del med lengde dx' i posisjonen $\vec{r}' = x'\hat{x}$ vil bidra med en ladning $dq = \rho_(x')dx'$. Bidraget til det elektriske feltet fra denne ladningen er:

$$d\vec{E} = \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} , \tag{9}$$

Vi finner feltet ved å integrere fra $x' = 0$ til $x' = L$:

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - (x', 0, 0)}{|\vec{r} - (x', 0, 0)|^3} = \int_0^L \frac{\rho_l(x')dx'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x')\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{|(x - x')^2 + y^2 + z^2|^{3/2}} . \tag{10}$$

f) Anta at du kan tilnærme integralet med en sum over N elementer med bredde $dx_i = L/N$ i posisjonene $x_i = (i + 1/2)dx_i$ for $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Hvert element bidrar med en punktladning $dq_i = \rho_l(x_i)dx_i$. Skriv et kort program som finner en tilnærmet verdi for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r}$ ved å summere feltene fra punktladningene dq_i.

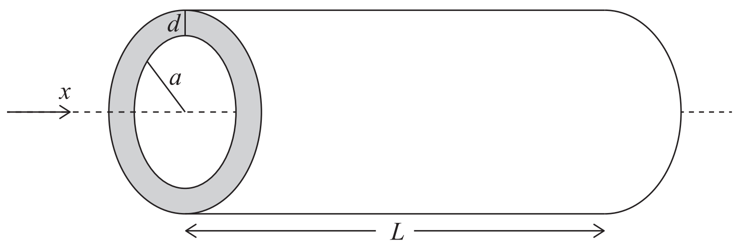
Sensorveiledning. *Læringsmål: Kunne finne felt numerisk fra en gitt ladningsfordeling.* Integral over $\rho_l(x)$ alene og Gauss lov gir maks 1.

Solution. Programmet blir:

```
import numpy as np
from scipy.constants input epsilon_0
N = 100
r = np.array([2,3,4])
L = 2
E = np.array([0,0,0])
x0 = 0
dx = L/N
for i in range(N):
    x = i*dx + x0
    dr = r-np.array([x,0,0])
    dE = rho_l(x)*dx/(4*np.pi*epsilon_0)*dr/dot(dr,dr)**1.5
    E = E + dE
```

Oppgave 2: Sylindrisk komponent

Vi skal i denne oppgaven studere oppførselen til en sylinderformet nervecelle som illustrert i figuren. Vi modellerer en del av cellen som et sylinderskall. Sylinderskallet har lengde L. Den indre radiusen er a. Tykkelsen på sylinderskallet er d. Du kan anta at L er mye større enn a og d slik at systemet har sylindersymmetri.



Først ønsker vi å finne **kapasitansen** til sylinderskallet. Vi antar da at området innenfor og utenfor sylinderskallet er ideelle ledere. Sylinderskallet er et dielektrisk materiale med dielektrisk konstant ϵ.

a) Anta at det er en ladning Q på den indre overflaten av sylinderskallet og en ladning $-Q$ på den ytre overflaten av sylinderskallet. Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Gauss lov og symmetri. Dielektriske medier.* Trekk 1 hvis man bruker ϵ_0 i stedet for ϵ. Trekk 1 hvis symmetri ikke kommenteres. Trekk 1 hvis ikke endene av sylinderen nevnes.

Solution. Vi antar at det elektriske feltet har sylindersymmetri, slik at det har formen $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, i sylinderkoordinater. Vi bruker Gauss' lov på en sylinderflate med lengde L. For $r < a$ vil det ikke være noen ladning innenfor flaten, derfor er feltet null her. For $r > a + d$ vil det ikke være noen netto ladning innenfor flaten, derfor er feltet null her. I sylinderskallet gir Gauss' lov:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2\pi rL = Q/\epsilon \Rightarrow E = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon r} \tag{11}$$

b) Finn skalarpotensialet $V(r)$ som funksjon av avstanden r til sylinderskallets akse.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Skalarpotensial.* Trekk 1 hvis man finner $V(a)$ og ikke $V(r)$. Trekk 1 hvis man ikke oppgir $V(r)$ for $r < a$. Trekk 1 hvis fortegnet er feil – potensialet skal være fallende med økende r.

Solution. Vi antar at potensialet på den ytre overflaten er det samme som uendelig langt vekk fra sylinderen - vi setter derfor dette til å være referanseverdien som er null.

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^{a+d} E(r)dr = \int_r^{a+d} \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon r}dr & (12) \\ &= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{a+d}{r}\right) . & (13) \end{aligned}$$

For $r < a$ vil potensialet være det samme som i $V(a)$ da det elektriske feltet her er null (og det er en ideell leder).

c) Vis at kapasitansen til sylinderskallet er

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} . \tag{14}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Definisjon av kapasitans og potensialforskjell.* Følgefeil fra forrige oppgave gir også trekk her.

Solution. Vi finner kapasitansen ved $C = Q/V$ hvor $V = V(a) = Q/(2\pi\epsilon L)\ln(1 + d/a)$:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} . \tag{15}$$

Så ønsker vi å finne **resistansen** til sylinderskallet. Sylinderskallet er en leder med konduktivitet σ.

d) Finn strømtettheten $\vec{J}$ i sylinderskallet når det går en strøm I gjennom sylinderskallet fra den indre til den ytre overflaten.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Bevaring av ladning, forholdet mellom strømtetthet og strøm, symmetri.* Trekk 1 hvis ikke symmetri nevnes eller diskuteres. Trekk 0-1 hvis det ikke nevnes at I må være den samme på alle sylinderskall avhengig av hvordan symmetrien formuleres. Hvis man skriver direkte $\vec{J} = I/A\hat{r} = I/(2\pi rL)\hat{r}$ uten ytterligere begrunnelse gis derfor 3.

Solution. På grunn av sylindersymmetri antar vi at strømtettheten også er sylindersymmetrisk: $\vec{J} = J(r)\hat{r}$. Den totale strømmen gjennom ethvert sylinderskall mellom den indre og den ytre flaten vil ha samme strømmen I på grunn av bevaring av ladning. Denne strømmen er:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = J(r)2\pi Lr \Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi rL} \; . \tag{16}$$

e) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i sylinderskallet i dette tilfellet.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Bruk av Ohms lokale lov.* Trekk 1 hvis bruk av Ohms lov ikke nevnes eller begrunnes. Det betyr at å skrive opp $\vec{E} = (1/\sigma)\vec{J}$ uten kommentar maks gir 4. Trekk 1 ved klar benevningsfeil. Ved følgefeil fra forrige oppgave gis maks 2 for å vite hvordan man skal kunne regne ut $\vec{E}$.

Solution. Vi finner det elektriske feltet ved Ohm's lov: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ og derfor

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} = \frac{I}{2\pi\sigma Lr}\hat{r} \; . \tag{17}$$

f) Finn skalarpotensialet $V(r)$ i sylinderskallet og bruk dette til å vise at resistansen til sylinderskallet er

$$R = \frac{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)}{2\pi\sigma L} \; . \tag{18}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Definisjon og bruk av definisjon av resistans.* Hvis man ikke har regnet ut $V(r)$, men kun $V(a)$ trekkes det 1.

Solution. Vi antar igjen at potensialet er null ved $r = a + d$, og finner V fra

$$V(r) = \int_r^{a+d} E(r)dr = \int_r^{a+d} \frac{I}{2\pi\sigma Lr}dr \tag{19}$$

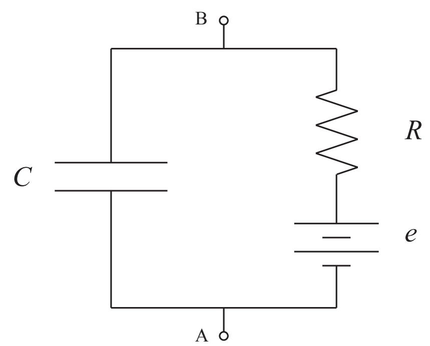
$$= \frac{I}{2\pi\sigma L} \ln\left(\frac{a+d}{r}\right) \; . \tag{20}$$

og vi finner da $R = V/I$ som gir

$$R = \frac{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)}{2\pi\sigma L} \, . \tag{21}$$

Oppgave 3: Krets-modell for en celle

Vi skal studere en krets som en modell for en cellemembran. Kretsen består av en kondensator C, en motstand R og et batteri med emf e koblet sammen som illustrert i figuren. Vi måler potensialforskjellen mellom punkt A og B, V_{AB}.



a) Ved tiden $t = 0$ er kondensatoren uten ladning. Hva er strømmen I_R gjennom motstanden ved $t = 0$?

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kirchoffs-spenningslov og egenskaper til en kondensator.* Gi 2 hvis Kirchoffs spenningslov er riktig satt opp, men tolkning av kondensatoren er gal. Trekk 1-2 hvis det ikke brukes at ladningen er null og dermed at spenningsfallet over kondensatoren er null.

Solution. Ved $t = 0$ er det ikke noen ladning på kondensatoren. Spenningsfallet over denne er derfor null. Kirchoff spenningslov rundt sløyfen gir da: $e - RI = 0$ og derfor $I(t = 0) = e/R$.

b) Hva er ladningen, Q_∞, på kondensatoren når $t \to \infty$?

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kirchoffs spenningslov og tolkning av stasjonæritet.* Gi 2 hvis Kirchoffs spenningslov er riktig satt opp, men tolkningen av kondensatoren er gal. Trekk 2 hvis det ikke brukes at strømmen er null eller et annet tilsvarende argument. Det gis kun 1 hvis det kun hevdes at spenningen går mot e uten et argument.

Solution. Når $t \to \infty$ vil ladningen Q gå mot en stasjonær verdi slik at det ikke lenger er noen endring i ladningen. Dermed vil strømmen, $I = dQ/dt$, gå mot null. Kirchoffs spenningslov rundt sløyfen gir da: $e - RI - Q/C = 0$, hvor $I = 0$ og dermed $Q = Q_\infty = eC$.

c) Vis at likningen som beskriver ladningen, Q, på kondensatoren kan skrives som

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(Q_\infty - Q\right) \ , \tag{22}$$

hvor $\tau = RC$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kirchoffs spenningslov for krets med flere elementer.* Trekk 1-2 hvis Kirchoffs spenningslov ikke nevnes. Det gis ikke poeng for å løse likningen – det er kun begrunnelse for likningen som gir uttelling.

Solution. Kirchoffs spenningslov gir $e - (Q/C) - RI = 0$ hvor vi nå setter at $I = dQ/dt$ og får:

$$e - \frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}\left(e - \frac{Q}{C}\right) \tag{24}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}\left(eC - Q\right) \tag{25}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(Q_\infty - Q\right) \tag{26}$$

d) Skriv et program som finner spenningen $V_{AB}(t)$ som funksjon av tiden for dette systemet.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Numerisk løsning av kretsdynamikk. Tolkning av spenning for en kondensator med tidsvarierende ladning.* Gi kun 1 om programmet plotter den eksakte løsningen. Trekk 1-2 hvis man ikke har tatt med `dt`. Trekk 1 hvis man ikke tar med den tidsoppdaterte `Q[i]` inne i løkken. Trekk 1 hvis man ikke øker `Q` med `dQ` inne i sløyfen, men kun settet `Q` til å være høyreleddet i diff-likningen. Trekk 1-2 hvis man tar med `I` i uttrykket for V_{AB} uten å regne ut I – altså at man antar at I er konstant. Det gis 1 hvis man utvikler et uttrykk for dV_C/dt, men ikke husker at Q også er forbundet med V_C.

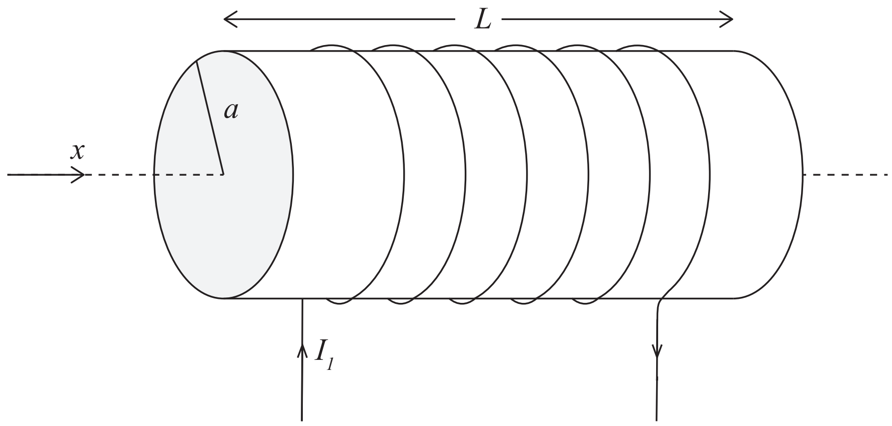
Solution.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Q0 = 0
```

```python
tau = 3.4
Qinf = 4.0
dt = 1e-5
time = 10.0
n = int(np.ceil(time/dt))
Q = np.zeros((n,1),float)
Q[0] = Q0
for i in range(n-1):
    Q[i+1] = Q[i] + (1/tau)*(Qinf-Q[i])*dt
plt.plot(Q)
```

Merk at selv om denne likningen er løsbar, er det i denne oppgaven ikke spurt om å plotte den eksakte løsningen, men å skrive et program som finner løsningen.

Oppgave 4: Dobbeltspole

Vi skal i denne oppgaven studere en solenoide som vist i figuren. Solenoiden består en ledning som er viklet N ganger om en sylinder med radius a og lengde L hvor $L \gg a$. Inne i sylinderen er det et magnetisk materiale med permeabilitet μ.



a) Finn $\vec{H}$-feltet, $\vec{B}$-feltet og magnetiseringen $\vec{M}$ inne i solenoiden når det går en strøm I gjennom ledningen. Du kan anta at $\vec{H}$-feltet er null utenfor solenoiden og at $\vec{H}$-feltet kun har en komponent i x-retningen inne i spolen.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Amperes lov, symmetri for magnetfelt, magnetiske materialer.* Trekk 1 hvis det ikke er forklart eller illustrert hvilken kurve det integreres over. Gi 2 hvis det integreres over en kurve som ikke følger symmetrien, slik som en sirkel.

Solution. Vi anveder Amperes lov:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = HL \Rightarrow H = \frac{NI}{L} \tag{27}$$

og dermed $\vec{H} = NI/L\hat{x}$. Vi finner $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu NI/L\hat{x}$. Magnetiseringen er gitt ved at $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu\vec{H}$ og dermed $\vec{M} = (\mu/\mu_0 - 1)\vec{H}$.

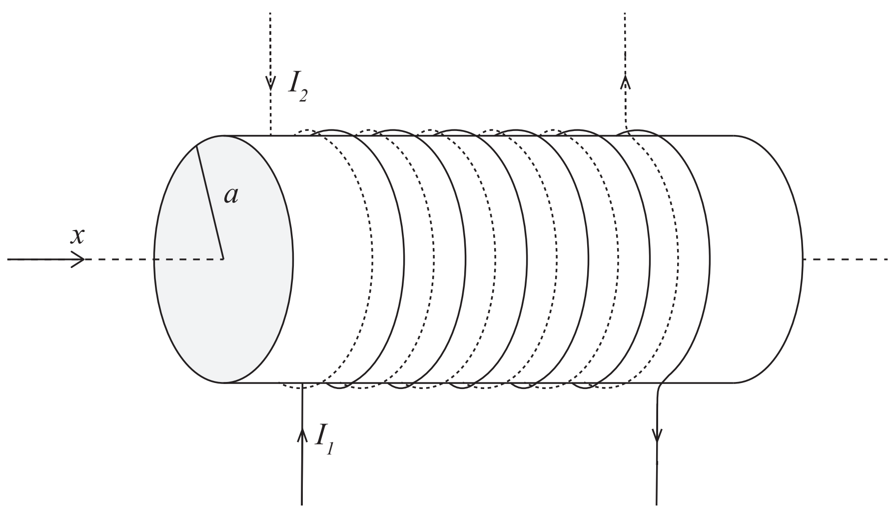
b) Finn selvinduktansen L_{11} for spolen.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Definisjon og utregning av selv-induktans.* Trekk 2 hvis flaten det integreres over ikke er diskutert, selv om riktig faktor N er satt inn. Trekk ytterligere 1 hvis kun tverrsnittet er inkludert og ikke alle viklingene.

Solution. Selvinduktansen er gitt som $L_{11} = \Phi/I$ hvor

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu IN}{L} \int_S dS = \frac{\mu IN}{L} N\pi a^2 = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{L} \ . \tag{28}$$

Vi vikler nå en ny ledning rundt den samme spolen med M antall viklinger som illustrert med stiplet linje i figuren under. Merk at indikert positiv strømretning rundt spolen for strøm I_2 er motsatt av positiv strømretning for I_1. Du kan anta at a og L er de samme, at ledningene er isolerte slik at de ikke er i kontakt og at begge ledningene dekker det samme området på sylinderen.



c) Hva er den gjensidige induktansen L_{12} mellom disse to spolene?

Sensorveiledning. *Læringsmål: Definisjon og utregning av gjensidig induktans.* Trekk 1-2 hvis ikke integrasjonsflaten er diskutert eller skissert. Hvis man kun skriver $\Phi_{12} = M\Phi_1$ uten noe argument gis det kun 2.

Solution. Vi finner fluksen av feltet fra spole 1 gjennom kresten utspent av spole 2:

$$\Phi_{12} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I_1 N}{L} M\pi a^2 \ , \tag{29}$$

som gir at

$$L_{12} = \Phi_{12}/I_1 = \frac{\mu N M \pi a^2}{L} \ . \tag{30}$$

d) Vi kobler spole 1 til en tidsvarierende spenningskilde med emf $V_1(t)$ og spole 2 til en motstand R_2. Finn et sett med likninger for strømmene I_1 og I_2 i spole 1 og spole 2. (Du skal ikke løse disse likningene).

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kirchoffs spenningslov med induktanser. Bruk av selv- og gjensidig induktans i en ny fysisk situasjon.*

Solution. Vi anvender Kirchoffs spenningslov rundt hver av de to kretsene.

$$V_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = 0 \ , \tag{31}$$

hvor Φ_1 er den totale fluksen gjennom krets 1. Denne skyldes både feltet fra krets 1 og feltet fra krets 2: $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$.

$$RI_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = 0 \ , \tag{32}$$

hvor Φ_2 er den totale fluksen gjennom krets 2. Denne skyldes både feltet fra krets 1 og feltet fra krets 2: $\Phi_2 = \Phi_{12} + \Phi_{22}$.

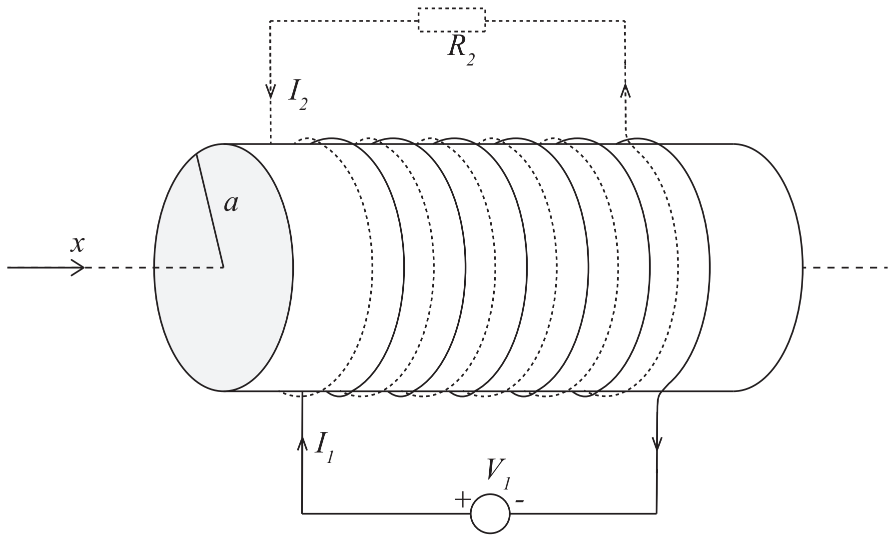
Vi kan så bruke definisjonen av gjensidig induktans: $\Phi_{11} = L_{11}I_1$, $\Phi_{12} = L_{12}I_1$. $\Phi_{21} = L_{21}I_2$ og $\Phi_{22} = L_{22}I_2$. Da får vi:

$$V_1 - L_{11}\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt} = 0 \ , \tag{33}$$

og

$$RI_2 - L_{22}\frac{dI_2}{dt} - L_{21}\frac{dI_1}{dt} = 0 \ , \tag{34}$$

hvor vi så kan bruke at $L_{12} = L_{21}$. Vi kjenner L_{11} og kan tilsvarende finne L_{22}.


R2
I2
a
x
I1
V1
+
-